MODELOS ÁLGEBRA LINEAL

1	Sea I la matriz identidad de orden 2 y $$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ (a) [1'25 puntos] Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2 (b) [1'25 puntos] Para m = 2, halla la matriz X tal que $AX - 2A^T = O$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.
2	Considera la matriz $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$ (a) [1 punto] Determina la matriz $B = A^2 - 2A$ (b) [0'75 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa. (c) [0'75 puntos] Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$
3	(a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ (b) [1'5 puntos] Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior. $$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array}\right\}$$
4	Considera las matrices $$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ (a) [0'75 puntos] Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa. (b) [1'75 puntos] Para $\alpha = 1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial AX = B.

5	(a) [1'5 puntos] Calcula el valor de m para el que la matriz $$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & m\end{pmatrix}$$ verifica la relación $2A^2 - A = \mathbf{I}$ y determina A^{-1} para dicho valor de m. (b) [1 punto] Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = \mathbf{I}$, determina la expresión de M^{-1}en función de M y de **I**.
6	Sea A la matriz $$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & \lambda\\ -5 & \lambda & -5\\ \lambda & 0 & 3\end{pmatrix}$$ e **I** la matriz identidad de orden 3. (a) [1'25 puntos] Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2\mathbf{I}$ es cero. (b) [1'25 puntos] Calcula la matriz inversa de $A - 2\mathbf{I}$ para $\lambda = -2$.
7	2'5 puntos] Resuelve $AB^t X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y $$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\ \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
8	Considera $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, siendo a un número real. (a) [1 punto] Calcula el valor de a para que $A^2 - A =$ $\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$ (b) [1 punto] Calcula, en función de a, los determinantes 2 A y A^t, siendo A^t la traspuesta de A. (c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta
9	Sea $$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & m-3 & 3\\ m+1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$ (a) [1 punto] Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa. (b) [1'5 puntos] Para m = 0 y siendo X = (x y z) , resuelve X A = (3 1 1) .

10	[2.5 puntos] Resuelve $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
11	Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea **I** la matriz identidad de orden dos. (a) [1'25 puntos] Calcula los valores λ tales que $\lvert A - \lambda I \rvert = 0$. (b) [1'25 puntos] Calcula $A^2 - 7A + 10\,I$.
12	Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$, y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (a) [1 punto] Halla el valor de $m \in R$ para el que la matriz A no tiene inversa. (b) [1'5 puntos] Resuelve A X = O para m = 3.
13	Considera el sistema de ecuaciones lineales $$\lambda x - y - z = -1$$ $$x + \lambda y + z = 4$$ $$x + y + z = \lambda + 2$$ (a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ . (b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.
14	Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales $$-\lambda x + y + (\lambda + 1)z = \lambda + 2$$ $$x + y + z = 0$$ $$(1 - \lambda)x - \lambda y = 0$$ tiene más de una solución. (a) [1'5 puntos] Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ. (b) [1 punto] Halla todas las soluciones del sistema.
15	Considera el sistema de ecuaciones $$x + y + z = 0$$ $$2x + \lambda y + z = 2 \ .$$ $$x + y + \lambda z = \lambda - 1$$ (a) [1'5 puntos] Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible. (b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda=1$.

16	[2'5 puntos] Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a, $x + y + z = 0$ $(a + 1)y + 2z = y$ $x - 2y + (2 - a)z = 2z$
17	Considera el sistema de ecuaciones lineales $\lambda x + y - z = 1$ $x + \lambda y + z = \lambda$ $x + y + \lambda z = \lambda^2$ (a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ. (b) [1 punto] Resuélvelo para $\lambda = 2$.
18	[2'5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible: $x + my = m$ $mx + y = m$ $mx + my = 1$
19	Considera el sistema de ecuaciones $x + y + m z = 1$ $m y - z = -1$ $x + 2m y = 0$ (a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores de m. (b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.
20	Considera el sistema de ecuaciones $ax + y + z = 4$ $x - ay + z = 1$ $x + y + z = a + 2$ (a) [1'5 puntos] Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado. (b) [1 punto] Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$
21	Considera el sistema de ecuaciones lineales $x - y + z = 2$ $x + \lambda y + z = 8$ $\lambda x + y + \lambda z = 10$ (a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ . (b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.