MODELOS ÁLGEBRA LINEAL

1

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2007

Ejercicio 3. Sea **I** la matriz identidad de orden 2 y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) [1'25 puntos] Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2

(b) [1'25 puntos] Para m = 2,halla la matriz X tal que $AX - 2A^T = O$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

SOLUCIÓN:

(a)

$(A - I)^2 = O$; $A^2 - AI - IA + I^2 = O$; $A^2 - 2A + I = O$

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+m & 2m \\ 2 & m+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2m \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que m = 0

(b)

Si m = 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$AX - 2A^T = O$; $AX = O + 2A^T = 2A^T$

Como $|A| = 1 - 2 = -1 \neq 0$, la matriz A tiene inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)$ y podemos multiplicar la expresión $AX = 2A^T$, por la izquierda por A^{-1} quedándonos

$A^{-1}AX = A^{-1}2A^T$

$IX = 2A^{-1}A^T$

$X = 2A^{-1}A^T$

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2A^{-1}A^T = 2.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2

Ejercicio n° 3 de la opción A de junio de 2007

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(a) [1 punto] Determina la matriz $B = A^2 - 2A$

(b) [0'75 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

(c) [0'75 puntos] Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

(b)

B tiene inversa si $\det(B) \neq 0$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 4\lambda + 2 - (1 - \lambda)(-1 + \lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda + 3$$

Resolviendo $-\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ obtenemos $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$, por tanto si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3$ la matriz B tiene inversa.

(c)

B^{-1} con $\lambda = 1$

$B^{-1} = (1/|B|).\mathrm{Adj}(B^t)$

Con $\lambda = 1$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\det(B) = 4$; $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = (1/|B|).\mathrm{Adj}(B^t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3

Ejercicio n° 3 de la opción B de junio de 2007

(a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) [1'5 puntos] Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

	$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array}\right\}$$

Solución

(a)

$A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; det(A) = $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}_{3^a F+1^a F(-1)} = \begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}$ = 1(1+1) = 2

$A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $Adj(A^t)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$;

$A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (1/2)\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

(b)

El sistema $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array}\right\}$ en forma matricial es A.X = B, con $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

Como existe A^{-1}, multiplicando por la izquierda A.X = B por A^{-1}, tenemos

$A^{-1}(A.X) = A^{-1}.B$

$X = A^{-1}.B = (1/2)\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = (1/2)\begin{pmatrix}6\\-4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, es decir la solución es (x,y,z) =(3,-2,0)

4

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 3 de 2007.

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&1\\2&3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

(a) [0’75 puntos] Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1’75 puntos] Para α =1, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial AX = B.

Solución

(a)

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Existe A^{-1} si su determinante es $\neq 0$

det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = $3\alpha - 2 = 0$, de donde $\alpha = 2/3$.

Para $\alpha \neq 2/3$, existe A^{-1}.

(b)

Si $\alpha = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y det(A) = 1 con lo cual existe A^{-1}

Multiplicando por la izquierda la ecuación AX = B por la matriz inversa de A, A^{-1}, tenemos

A^{-1}. AX = A^{-1}.B, es decir X = A^{-1}.B

Recordamos que A^{-1} = (1/|A|). Adj(A^t)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

A^{-1} = (1/|A|). Adj(A^t) = (1/1). $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

5

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 5 de 2007.

(a) [1'5 puntos] Calcula el valor de m para el que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m.
(b) [1 punto] Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

Solución

(a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+m & m^2 \end{pmatrix}$;

$2A^2 - A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+m & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2+2m & 2m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2m+1 & 2m^2-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De 2m + 1 = 0, tenemos m = - 1/2

	De $2m^2 - m = 1$, resolviendo la ecuación $2m^2 - m - 1 = 0$, tenemos m = - 1/2 y m = 1, por tanto la única solución común es m = -1/2. Para m = - 1/2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$; det(A) = |A| = -1/2, luego existe A^{-1}. Recordamos que $A^{-1} = (1/\|A\|).\ Adj(A^t)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = (1/\|A\|).\ Adj(A^t) = (1/(-1/2)).\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2.\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, para obtener M^{-1} tenemos que tener en cuenta que. Si M es cuadrada y M.B = I, entonces por definición B es la matriz inversa de M. De $2M^2 - M$, sacando factor común la matriz M por la izquierda tenemos M(2M – I) = I. Por tanto por definición la matriz inversa es $M^{-1} = 2M - I$, siendo I la matriz unidad del mismo orden que M.
6	**Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 6 de 2007**. Sea A la matriz $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ e I la matriz identidad de orden 3. (a) [1'25 puntos] Calcula los valores de λ para los que el determinante de A− 2I es cero. (b) [1'25 puntos] Calcula la matriz inversa de A − 2I para λ = −2. **Solución** (a) $B = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(B) = \|B\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda)(1 + \lambda)$ El determinante de la matriz B = A – 2I es cero para λ = 2, λ = 1 y λ = - 1 (b)

Para λ = - 2, $B = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

det(B) = |B| = (- 2 - 2)(1 + 2)(1 - 2) = (- 4)(3)(- 1) = 12 $\neq$ 0, luego existe B^{-1}

$B^{-1} = (1/|B|)Adj(B^t)$

$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Luego $B^{-1} = (1/|B|)Adj(B^t) = \left(\frac{1}{12}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 5/4 & -1/4 & 5/4 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

7

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2006

[2’5 puntos] Resuelve $AB^t X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$AB^t X = -2C$

$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = M$

$-2C = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = N$

Por tanto la ecuación $AB^t X = -2C$ se nos ha transformado en MX = N con $M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como det(M) = |M| = $\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} =$ 2 – 30 = - 28 ≠ 0, la matriz M tiene inversa M^{-1}, y podemos multipicar por la izquierda la ecuación MX = N por la matriz inversa de M, M^{-1},

M^{-1}. MX = M^{-1}.N, es decir X = M^{-1}.N

	Recordamos que $M^{-1} = (1/\|M\|). Adj(M^t)$ $M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $M^t = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, $Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $M^{-1} = (1/\|M\|). Adj(M^t) = (1/-28). \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix}$ Por tanto $X = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & -1 \\ 5/14 & 3/2 \end{pmatrix}$
8	**Ejercicio n° 3 de la opción A de junio de 2006** Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real. (a) [1 punto] Calcula el valor de a para que $A^2 - A =$ $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ (b) [1 punto] Calcula, en función de a, los determinantes 2 A y A^t, siendo A^t la traspuesta de A. (c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta **Solución** (a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$ De donde $a^2 - a = 12$ y $a^2 + a = 20$. Sumando obtenemos $2 a^2 = 32$, luego $a = \pm 4$ Solamente a = +4 verifica las dos ecuaciones. (b) $\|A\| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2$ De $\|kA_n\| = k^n\|A\|$, obtenemos que $\|2A\| = 2^2(- a^2) = - 4a^2$ Sabemos que el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta, luego $\|A^t\| = \|A\| = - a^2$

También se puede hacer determinando las matrices 2A, A^t y calculando su determinante.

(c)

Sabemos que una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta. En las matrices simétricas se tiene la propiedad de que sus elementos son simétricos respecto a la diagonal principal, cosa que no ocurre con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, pues uno es 0 y el otro 1.

También se puede hacer igualando A = A^t y al resolverlo obtenemos el absurdo 0 = 1.

9

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 4 de 2006.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) [1 punto] Determina los valores de m $\in \Re$ para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1'5 puntos] Para m = 0 y siendo X = (x y z) , resuelve X A = (3 1 1) .

Solución

(a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Existe A^{-1} si y solo si det(A) =|A| $\neq$ 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a C + 3^a C \\ 1^a C + 3^a C \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & m & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$ (-1)(6 - m^2 – m) = 0

Las soluciones de 6 - m^2 – m = 0 son m = 2 y m = -3.

Para m $\neq$ 2 y m $\neq$ -3 existe A^{-1}

(b)

Para m = 0, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y tiene matriz inversa A^{-1}

XA = (3 1 1). Multiplicando por la derecha por A^{-1} tenemos X = (3 1 1)A^{-1}

A^{-1} = (1/|A|)Adj(A^t)

|A| = (-1)(6 - 0 – 0) = -6; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

	Luego $A^{-1} = (1/\|A\|)Adj(A^t) = \left(\frac{1}{-6}\right)\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ Por tanto $X = (\ 3\ 1\ 1\ )A^{-1} = X = (\ 3\ 1\ 1\ )\left(\frac{1}{-6}\right)\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-1/6)(\ -12\ -6\ -6\ ) = (\ 2\ 1\ 1\ )$
10	**Ejercicio n° 3 de la opción B de junio de 2006** [2.5 puntos] Resuelve $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ **Solución** De la igualdad matricial anterior deducimos el sistema: $$\begin{cases} 2x + 5z = 7 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$ Det $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =16; el sistema es compatible determinado, obteniéndose su solución fácilmente aplicando el método de reducción de Gauss – Jordan o bien la fórmula de Cramer , resultando $x = 1,\ y = -1,\ z = 1.$
11	**Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 4 de 2006.** Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos. (a) [1'25 puntos] Calcula los valores $\lambda \in \Re$ tales que $\|A - \lambda I\| = 0$. (b) [1'25 puntos] Calcula $A^2 - 7A + 10\ I$. **Solución** (a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; ; $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$ $(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$

Resolviendo $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, obtenemos $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$

(b)

$A^2 - 7A + 10I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$A^2 - 7A + 10I = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$, la matriz nula de orden 2.

12

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 5 de 2006.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) [1 punto] Halla el valor de $m \in R$ para el que la matriz A no tiene inversa.

(b) [1’5 puntos] Resuelve A X = O para m = 3.

Solución

(a)

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ no tiene inversa si |A| = 0

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m-4 & 1-m \end{vmatrix} =$ (1-m-1) – (2-2m-m+4) = 2m-6 = 0, de donde m = 3.

Para m = 3 no existe la inversa de A.

(b)

Para m = 3 es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Efectuando el producto tenemos

x+y = 0

2x+y+z = 0

-4x+y+z = 0

Como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

x+y = 0

2x+y+z = 0. Hacemos z = a $\in \Re$, tenemos x = -a e y = a.

La solución del sistema para m = 3 es (x,y,z)= (-a,a,a) con a $\in \Re$,

13

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2006

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x - y - z = -1$$
$$x + \lambda y + z = 4$$
$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 2.

Solución

$$\lambda x - y - z = -1$$
$$x + \lambda y + z = 4$$
$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el det(A) = |A|

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(-1) \\ 3^aC+1^aC(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ = (desarrollamos por el adjunto 31) =

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} =$$ - (λ - 1)(-1 - λ) = (λ - 1)(1 + λ)

Resolvemos |A| = 0, es decir (λ - 1)(1 + λ) = 0, de donde λ = 1 y λ = -1

Si λ **≠ 1 y** λ **≠ -1** , tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si λ **= 1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(1) \\ 3^aC+1^aC(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ = -2 ≠ 0, tenemos rango(A^*) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si λ **= -1**, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ 2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas proporcionales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, teniendo infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(b)

Resuelve el sistema para λ = 2.

Nuestro sistema es

2x – y – z = - 1

x + 2y + z = 4

x + y + z = 4

Sumando 1ª y 3ª tenemos 3x = 3, de donde x = 1. Tomamos la 1ª y la 2ª con x = 1

2 – y – z = -1

1 + 2y + z = 4

Sumándolas tenemos 3 + y = 3, de donde y = 0.

Sustituyendo x = 1 e y = 0 2n cualquier ecuación tenemos z = 3, por tanto la solución del sistema es (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando λ = 2.

También se puede hacer por la regla de Cramer (Vicenta Serrano)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-10+13}{3} = 1;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11+2+4-8}{3} = 3$$

Y como vemos, se obtiene la misma solución (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando $\lambda = 2$.

14

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 4 de 2007.

Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$-\lambda x + y + (\lambda + 1)z = \lambda + 2$$

$$x + y + z = 0$$

$$(1 - \lambda)x - \lambda y = 0$$

tiene más de una solución.

(a) [1'5 puntos] Calcula, en dicho caso, el valor de la constante λ.

(b) [1 punto] Halla todas las soluciones del sistema.

Solución

(a) y (b) (Entiendo como todas las soluciones del sistema cuando tiene infinitas soluciones)

$$-\lambda x + y + (\lambda + 1)z = \lambda + 2$$

$$x + y + z = 0$$

$$(1 - \lambda)x - \lambda y = 0$$

La matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$ y la ampliada $$A^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tiene más de una solución tiene infinitas soluciones por tanto det(A) = 0. Después para dichos valores estudiaremos el rango de A^*.

det(A) =0=

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a C - 2^a C = \\ 3^a C - 2^a C \end{matrix} \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-1 & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= \lambda(-\lambda - 1 - 1) = \lambda(-\lambda - 2)$

|A| = 0, nos dice que $\lambda(-\lambda - 2) = 0$ de donde $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$

Para que el sistema tenga **más de una solución** λ = **0** y λ **= -2** , con lo cual rango(A) = 2

Si $\lambda = 0$

La matriz de los coeficientes es

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2)(-1) = -2 \neq 0$, rango($A^*$) = 3

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible (No es nuestro caso)

Si $\lambda = -2$

La matriz de los coeficientes es

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(A) = 2 = rango($A^*$), porque la última columna de A^* es de ceros.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Para $\lambda = -2$, nuestro sistema es

$$2x + y - z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$3x + 2y = 0$$

Como solo necesitamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales, al ser rango 2, tomo las dos primeras

$2x + y - z = 0$

$x + y + z = 0$, tomo $z = m$ y restando me queda $x - 2m = 0$, de donde $x = 2m$; con lo cual $y = -3m$.

Solución $(x,y,z) = (2m, -3m, m)$ con $m \in \Re$

15

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 3 de 2007.

Considera el sistema de ecuaciones

$$x + y + z = 0$$

$$2x + \lambda y + z = 2\ .$$

$$x + y + \lambda z = \lambda - 1$$

(a) [1'5 puntos] Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ=1.

Solución

(a)

$$x + y + z = 0$$

$$2x + \lambda y + z = 2 .$$

$$x + y + \lambda z = \lambda - 1$$

La matriz de los coeficientes es

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

En A como

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, el rango de (A) por lo menos es 2.

El sistema será incompatible si rango (A) = 2 ≠ rango (A^*) = 3

Para que rango (A) = 2, |A| = o

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a C - 1^a C = \\ 3^a F - 1^a C \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$ (λ - 2)(λ - 1)

De |A| = 0, obtenemos (λ - 2)(λ – 1) = 0 de donde λ = 2 y λ = 1. Luego rango(A) = 2

Para que rango (A^*) = 3, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} 2^a C - 1^a C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$ - 3λ + 3

Para que rango (A^*) = 3, - 3λ + 3 ≠ 0, resulta que λ ≠ 1.

Como tiene que ocurrir que λ = 2 y λ = 1 por un lado y por el otro λ ≠ 1, la única posibilidad que nos queda es λ = 2.

Se puede comprobar y ver que es incompatible con λ = 2.

(b)

Si λ = 1, ya sabemos que es compatible e indeterminado por tanto nos quedamos ya con dos ecuaciones y dos incógnitas principales

x + y + z = 0

2x + y + z = 2 .

x + y + z = 0

Nos quedamos con la 1ª y la 2ª

x + y + z = 0

2x + y+ z = 2. Restando a la 2ª la 1ª , queda x = 2

Hacemos z = m

2 + y + m = 0

4 + y + 2m = 2, de donde y = - m – 2

Solución (x, y, z) = (2, - 2 – m, m) con m $\in \Re$

16

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 4 de 2007.

[2'5 puntos] Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a,

$$x + y + z = 0$$
$$(a + 1)y + 2z = y$$
$$x - 2y + (2 - a)z = 2z$$

Solución

$$x + y + z = 0 \rightarrow x + y + z = 0$$
$$(a + 1)y + 2z = y \rightarrow ay + 2z = 0$$
$$x - 2y + (2 - a)z = 2z \rightarrow x - 2y - az = 0$$

Como vemos es un sistema homogéneo con matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial (0, 0, 0) el determinante de la matriz de los coeficientes ha de ser 0, es decir |A| = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a F - 1^a F \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -3 & -a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = - a^2 - a + 6$$

Igualando a cero $- a^2 - a + 6 = 0$, tenemos como soluciones a = 2 y a = - 3

Si a = 2 y a = - 3 el sistema es compatible e indeterminado.

Si a = 2, como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

x + y + z = 0

2y + 2z = 0. de donde tomando z = m tenemos y = - m y x = 0

Solución (x, y, z) = (0, -m, m) con m $\in \Re$

Si a = - 3, como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras

	x + y + z = 0 -3y + 2z = 0. de donde tomando z = m, tenemos y = (2/3) m y x = (-5/3)m Solución (x, y, z) = ((-5/3)m, (2/3)m, m) con m $\in \Re$
17	**Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 1 de 2006.**

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x + y - z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [1 punto] Resuélvelo para λ = 2.

Solución

(a)

$$\lambda x + y - z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}_{2^a F + 1^a F} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} =$

$= (-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ $0 + \lambda(\lambda^2 + \lambda - \lambda - 1) = \lambda(\lambda^2 - 1)$

|A| = 0, nos dice que $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ de donde λ = 0, λ = 1 y λ = -1

Si λ ≠ 0, λ ≠ 1 y λ ≠ -1 , rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si λ = 0

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ -1 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ 1(1-0) = 1 $\neq$ 0, rango(A^*) = 3

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible

Si λ = 1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 2 $\neq$ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0 por tener dos filas iguales, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Si λ = -1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 2 $\neq$ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0 por tener dos columnas iguales, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(b)

Lo resolvemos para λ **= 2**. El sistema es

2x + y – z = 1

x +2 y + z = 2

x + y + 2z = 4. Cambiamos la 1ª ecuación por la 2ª y después 2ª + 1ª(-2) y 3ª + 1ª(-1)

x + 2y + z = 2

0 - 3y -3z = -3

	0 - y + z = 2. Dividimos la 2ª por (-3) y después 3ª + 2ª x + 2y + z = 2 0 +y +z = 1 2 z = 3. De donde z = 3/2, y = -1/2 y x = 3/2. La solución del sistema es (x,y,z)= (3/2, -1/2, 3/2)
18	**Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 5 de 2007.**

[2'5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible:

$$x + my = m$$
$$mx + y = m$$
$$mx + my = 1$$

Solución

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \\ m & m \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$

Como el sistema es compatible tiene tres ecuaciones con dos incógnitas el determinante de la matriz ampliada det(A^*) = |A^*| tiene que ser cero. Para los valores que nos salgan de "m"· estudiaremos el sistema.

det(A^*) = $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} =$ $1(1 - m^2) - m(m - m^2) + m(m^2 - m) = 2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$

Para resolver $2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$, aplicamos primero Ruffini

	2	- 3	0	1
1		2	-1	-1
	2	- 1	-1	0

Cociente $2m^2 - m - 1 = 0$, que es una ecuación de 2º grado y sus soluciones son m = 1 y m = -1/2. Nos han salido como soluciones de m el 1 (doble) y el -1/2.

Si **m = 1** tengo tres ecuaciones iguales, por tanto elijo solo una

x + y = 1. Tomo y = λ con lo cual x = 1- λ .

Solución (x,y) = (1 - λ , λ) con $\lambda \in \Re$

Si **m = -1/2** tomo sólo dos ecuaciones, la 2ª y la 3ª.

(-1/2)x + y = -1/2.

(-1/2)x + (-1/2)y = 1. Resolviendo esta sistema sale x = -1 e y = -1

Solución (x,y) = (- 1,-1)

19

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 6 de 2007.

Considera el sistema de ecuaciones

$$x + y + m z = 1$$

$$m y - z = -1$$

$$x + 2m y = 0$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores de m.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

$$x + y + m z = 1$$

$$m y - z = -1$$

$$x + 2m y = 0$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 1 & 2m & 0 & 0 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix}_{3^a F - 1^a F} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m \end{vmatrix} =$ $- m^2 + 2m - 1$

|A| = 0, nos dice que $- m^2 + 2m - 1 = 0$ y las soluciones son m = 1 (doble)

Si m $\neq$ 1 , rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

(b)

Si m = 1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{3^a F - 3^a F)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Este es el caso que nos piden resolver.

(b)

Hemos visto que para **m = 1**, rango(A) = rango(A^*) = 2 por tanto sólo tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Elijo 1ª y 2ª ecuación.

x + y + z = 1

+ y – z = - 1.

Tomando z = a $\in \Re$ obtenemos y = – 1 + a y x = 2 – 2a, luego la solución del sistema para **m = 1** es (x, y, z) = (2 – 2a, – 1 + a, a) con a $\in \Re$

20 **Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2007**

Considera el sistema de ecuaciones

$$ax + y + z = 4$$

$$x - ay + z = 1$$

$$x + y + z = a + 2$$

(a) [1'5 puntos] Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema que se obtiene para a = –2.

Solución

$$ax + y + z = 4$$

$$x - ay + z = 1$$

$$x + y + z = a + 2$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el det(A) = |A|

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1^aF-3^aF \\ 2^aF-3^aF \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(-a-1)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir (a - 1)(-a - 1) = 0, de donde a = 1 y a = -1

*Si **a ≠ 1 y a ≠ -1** , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **a = 1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ -2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF-1^aF \\ 3^aF-1^aF \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si **a = -1**, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ -2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como tenemos dos filas iguales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A)y dos incógnitas principales..

Lo resolvemos para a = -1

$-x + y + z = 4$

$x + y + z = 1$. Tomamos $z = \lambda$

Restamos ambas ecuaciones y tenemos

$2x = -3$, de donde $x = -3/2$

$y = 1 – x – z = 1 + 3/2 - \lambda = 5/2 - \lambda$

La solución del sistema es $(x, y, z)= (-3/2, 5/2 - \lambda , \lambda)$ con $\lambda \in \Re$

(b)

Resolvemos el sistema para a = -2.

Nuestro sistema es

$-2x + y + z = 4$

$x + 2y + z = 1$

$x + y + z = 0$

A la 2ª le resto la 3ª, y a la 1ª le sumo la 3ª multiplicada por 2, con lo cual nos queda

$3y + 3z = 4$

$y = 1$ $\quad x + y + z = 0$ Con y = 1 entrando en la 1ª tenemos z = 1/3.

	Con y = 1 y z = 1/3, entrando en la 3ª tenemos x = -4/3 La solución del sistema es (x, y, z) = (-4/3, 1, 1/3) ***También se puede hacer por Cramer*** $$x=\frac{\begin{vmatrix}4&1&1\\1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{4}{-3};\ y=\frac{\begin{vmatrix}-2&4&1\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{-3}{-3}=1;\ z=\frac{\begin{vmatrix}-2&1&4\\1&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{-1}{-3}$$ Y como vemos se obtiene la misma solución (x,y,z) = (-4/3, 1, 1/3) cuando a = -2.
21	**Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 5 de 2006.** Considera el sistema de ecuaciones lineales $$x - y + z = 2$$ $$x + \lambda y + z = 8$$ $$\lambda x + y + \lambda z = 10$$ (a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ . (b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 2. **Solución** (a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&\lambda&1\\\lambda&1&\lambda\end{pmatrix}$ y la ampliada $A^*=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\1&\lambda&1&8\\\lambda&1&\lambda&10\end{pmatrix}$ det(A) = $\lvert A\rvert=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&\lambda&1\\\lambda&1&\lambda\end{vmatrix}=0$, sea cual sea el λ porque tiene dos columnas iguales. Por tanto rango(A) < 3 siempre. En A^*, $\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&\lambda&8\\\lambda&1&10\end{vmatrix}\begin{matrix}2^aC+1^aC\\3^aC+1^aC(-2)\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda+1&6\\\lambda&\lambda+1&10-2\lambda\end{vmatrix}=$ $(\lambda +1)(10-2\lambda) - 6(\lambda +1) = (\lambda +1)(-2\lambda +4)$ $(\lambda +1)(-2\lambda +4) = 0$ nos da $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ **Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$** rango(A^*) = 3 $\neq$ rango(A) por tanto por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible.

Si λ = -1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

En A como las tres filas son proporcionales, tenemos que rango(A) = 1, luego todos los menores de orden dos son cero.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} =$ $6 \neq 0$, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = 1 $\neq$ rango(A^*) = 2, el sistema es incompatible

(b)

Si λ = 2

Ya sabemos que rango(A^*) = 2, del apartado "si λ = -1"

En $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$ $3 \neq 0$, rango(A) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado. Tomaremos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomo las dos primeras.

$x - y + z = 2$

$x + 2y + z = 8$, 2ª + 1ª (-1)

$x - y + z = 2$

$3y = 6$, de donde $y = 2$. Haciendo $z = m \in \Re$, tenemos $x = 4 - m$, y la solución del sistema es $(x,y,z) = (4-m,2,m)$