MODELOS GEOMETRÍA

1

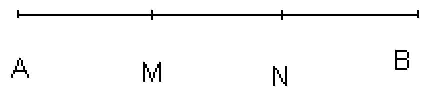
Ejercicio nº 4 de la opción A de septiembre de 2007

(a) [1'25 puntos] Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos A(1,2,1) y B(-1,0,3) en tres partes iguales.

(b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio

Solución

(a)



A(1,2,1) y B(-1,0,3)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores **AB** = 3**AM**

AB = (-2,-2,2)

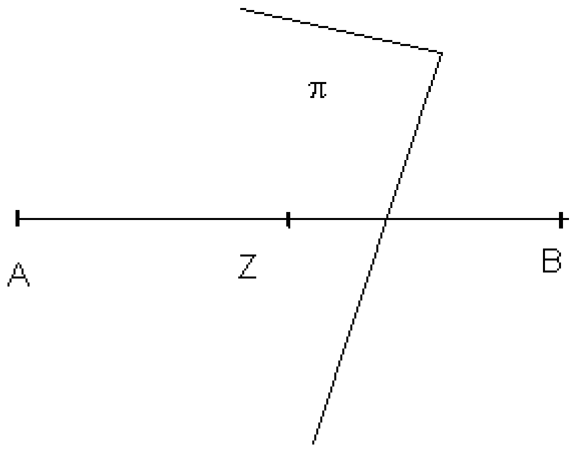
AM = (x-1,y-2,z-1)

De **AB** = 3**AM** obtenemos (-2,-2,2)= (3x - 3, 3y - 6, 3z - 3), e igualando miembro a miembro se tiene x = 1/3, y = 4/3 y z = 5/3, es decir el punto M es M(x,y,z) = M(1/3,4/3,5/3)

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir

N(x,y,z)= N((1/3 -1)/2, (4/3 + 0)/2, (5/3 + 3)/2) = N(-1/3,2/3,7/3)

(b)



A(1,2,1), B(-1,0,3) y Z como es el punto medio, es Z(0,1,2)

El plano pedido pasa por el punto Z(0,1,2) y tiene como vector normal el **AB** = (-2,-2,2)

La determinación normal del plano es **AB•** (**x** – **z**) = 0, siendo • el producto escalar, es decir

(-2,-2,2) • (x – 0, y – 1, z – 2) = -2x – 2y + 2 + 2z – 4 = -2x -2y + 2z – 2 = 0. Simplificando el plano pedido es $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$

2	**Ejercicio nº 4 de la opción B de septiembre de 2007**

Considera los vectores **u** = (1,1,m), **v** = (0,m,-1) y **w** = (1,2m,0).

(a) [1'25 puntos] Determina el valor de m para que los vectores **u**, **v** y **w** sean linealmente dependientes.

(b) [1'25 puntos] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector **w** como combinación lineal de los vectores **u** y **v**.

Solución

(a)

u = (1,1,m), **v** = (0,m,-1) y **w** = (1,2m,0).

Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^aF-1^aF \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1 = 0$$

Resolviendo $-m^2 + 2m - 1 = 0$, obtenemos m = 1 (doble), con lo cual para que sean linealmente dependientes los vectores son **u** = (1,1,1), **v** = (0,1,-1) y **w** = (1,2,0).

(b)

Para expresar **w** como combinación lineal de **u** y **v** tenemos que calcular a y b de la expresión **w** = a.**u** + b.**v**, resolviendo el sistema que nos sale.

(1,2,0). = a(1,1,1) + b(0,1,-1) = (a, a + b, a – b). Igualando obtenemos a = 1 y b = 1, por tanto la relación de dependencia es **w** = 1.**u** + 1.**v**.

Esto es la forma normal de hacerlo, pero nos podríamos haber dado cuenta de que sumando el vector **u** con el vector **v** nos daba el vector **w** y habríamos terminado.

3	**Ejercicio nº 4 de la opción A de junio de 2007**

Considera los planos de ecuaciones x – y + z = 0 y x + y – z = 2.

(a) [1 punto] Determina la recta que pasa por el punto A(1,2,3) y no corta a ninguno de los planos dados.

(b) [1'5 puntos] Determina los puntos que equidistan de A(1,2,3) y B(2,1,0) y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Solución

(a)

Plano x – y + z = 0, vector normal **n** = (1,-1,1)

Plano x + y – z = 2, vector normal **n'** = (1,1,-1)

Como los vectores normales **n** y **n'** no son proporcionales, los planos son secantes y se cortan en una recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$.

Como me piden una recta que no corte a ninguno de los dos planos lo que me están pidiendo es una recta "s" paralela a la recta "r", luego me sirve como vector director el de la recta "r" que es el producto vectorial de **n** con **n'**.

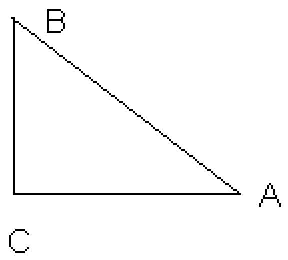
	Recta "s", punto el A(1,2,3), vector **u** = **n** x **n'** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(1 – 1) – **j**(-2) + **k**(2) = (0,2,2) La recta "s" en paramétricas es $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ (b) Los planos x – y + z = 0 y x + y – z = 2, son secantes y ya sabemos que se cortan en la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$, que tenía de vector director **u** = **n** x **n'** = (0,2,2). Un punto E de "r" lo obtenemos tomando z = 0, con lo cual resolviendo el sistema de la recta "r" obtenemos x = y = 1. El punto E es E(1,10) Ponemos la recta "r" en paramétricas para tomar un punto genérico C de la recta "r" Recta "r" en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$. El punto genérico C de "r" es C(1, 1+2t, 2t). Como dicen que los puntos A(1,2,3) y B(2,1,0) equidistan de la recta "r", equidistan de un punto genérico suyo, el C, es decir d(A,C) = d(B,C) (las distancias son iguales) d(A,C) = | **AC**| = $\sqrt{0^2 + (-1+2t)^2 + (-3+2t)^2}$ **AC** = (1 - 1, 1 + 2t -2, 2t – 3) = (0, -1+2t, -3+2t) d(B,C) = | **BC**| = $\sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t)^2}$ **BC** = (1 - 2, 1 + 2t -1, 2t – 0) = (1, 2t, 2t) Igualando tenemos $\sqrt{0^2 + (-1+2t)^2 + (-3+2t)^2} = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t)^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando obtenemos 16t = 9, de donde t = 9/16, y los puntos de la recta "r" que equidistan de A y B es solo uno el C(1,1+2(9/16), 2(9/16)) = C(1, 17/8, 9/8).
4	**Ejercicio n° 4 de la opción B de junio de 2007** Considera los puntos A(0,3,-1) y B(0,1,5). (a) [1'25 puntos] Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y C(x,4,3) tiene un ángulo recto en C.. (b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,1,5) y (3,4,3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Solución

(a)

A(0,3,-1) , B(0,1,5) y C(x,4,3)

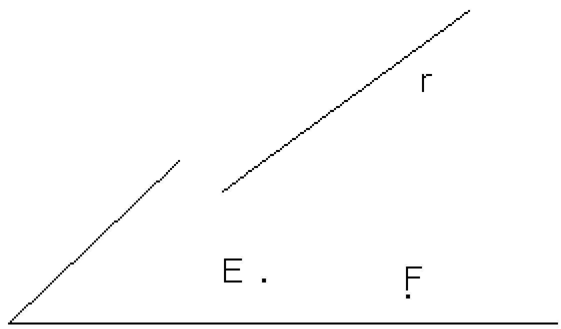
Si el triángulo es rectángulo en C el producto escalar **CA• CB** es cero



CA = (- x, -1, -4); **CB** = (- x, -3, 2)

CA• CB = $x^2 + 3 - 8 = 0$, de donde x = $\pm\sqrt{5}$. Hay dos soluciones para "x".

(b)



Para un plano necesito un punto E(0,1,5) y dos vectores independientes el **EF** = (3-0, 4-1, 3-5) = (3,3,-2) y el director de la recta "r", que es **u** = **n** x **n'** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(– 1) – **j**(-2) + **k**(3) = (-1,2,3)

Siendo **n** y **n'** los vectores normales de cada uno de los planos que determina la recta "r".

El plano pedido es 0 = det(**x** – **e**, **EF**, **u**) = $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-5 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ =

= x(9+4) – (y-1)(9-2) + (z-5)(6+3) = 13x – 7y + 9z – 38 = 0.

5

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 3 de 2007.

Sea "r" la recta definida por $\frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ y "s" la recta definida por $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

(a) [1'25 puntos] Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

(b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

	Solución

(a)

De $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ tomamos un punto A(2,k,0) y un vector director **u** = (3,4,5)

De s $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ tomamos un punto B(-2,1,3) y un vector director **v** = (-1,2,3)

Evidentemente las rectas se cortan o se cruzan porque los vectores **u** y **v** no son proporcionales.

Las rectas se cortan si y solo si det(**AB**,**u**,**v**) = 0

AB = (-4, 1-k, 3)

det(**AB**,**u**,**v**) = 0 = $\begin{vmatrix} -4 & 1-k & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ (- 4)(12 - 10) – (1 - k)(9+5) + (3)(6+4) = 14k + 8 = 0, de donde k = -4/7 para que las rectas se corten.

(b)

Para calcular el punto de corte C, ponemos ambas rectas en paramétricas con parámetros distintos e igualamos x = x, y = y , z = z

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4/7+4t \\ z = 5t \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -2-m \\ y = 2+2m \\ z = 3+3m \end{cases}$$

Igualamos, en nuestro caso x = x y z = z

2 + 3t = -2 - m

5t = 3 + 3m

Resolviendo este sistema obtenemos t = -9/14 y m = -29/14, lo cual verifica z = z, por tanto el punto de corte es

C(2 - (-29/11), 1 + 2(-29/11), 3 + 3(-29/11)) = C(1/14, -44/14, -45/14)

El Plano pedido es, es el que pasa por el punto de corte de las rectas y tiene como vectores paralelos independientes **u** y **v**, es decir det(**x - c**,**u**,**v**) = 0

det(**x - c**,**u**,**v**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-1/14 & y+44/14 & z+45/14 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

= (x - 1/14)(12 - 10) – (y + 44/14)(9+5) + (z + 45/14)(6+4) = 2x – 14y + 10z – 12 = 0. Simplificando nos quedaría el plano x – 7y + 5z – 6 = 0

6

Ejercicio 4 de la *Opción* B del modelo 3 de 2007.

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación x + 2y + 3z - 1 = 0 que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases} x = 2z+4 \\ y = 2z+3 \end{cases}$ en el punto (2,1, - 1).

Solución

Forma 1ª

Se pide calculemos una recta s contenida en el plano π y que corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ perpendicularmente en el punto P(2,1,-1)

$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$. En forma paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2m \\ y = 3 + 2m \\ z = m \end{cases}$

d_s = vector director de s $n\pi$ = vector normal del plano π = (1,2,3)

d_r = vector director de r = (2,2,1) y P_r = punto de r = (4,3,0)

Como la recta "s" está contenida en el plano "π ", los vectores d_s y $n\pi$ son perpendiculares.

Como "s" y "r" se cortan perpendicularmente, los vectores d_s y d_r. son perpendiculares Tenemos que d_s es perpendicular a la vez a los vectores d_r y $n\pi$, por tanto d_s es el producto vectorial de d_r y $n\pi$, es decir

$d_s = d_r \times n\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (4, -5, 2)$

Como "s" pasa por el punto de intersección P(2,1,-1), su ecuación paramétrica es:

$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$

Forma 2ª

La recta "s" pedida la vamos a dar como intersección de dos planos, uno el π y otro π' que será un plano perpendicular a r pasando por P *(la intersección de estos planos es la recta pedida porque pasa por P (que está en ambos planos) y además es perpendicular a r porque todas las rectas del plano π' son perpendiculares a r)*

$\pi' \perp r \Rightarrow$ vector normal de $\pi' = n\pi' = d_r = (2,2,1) \Rightarrow \pi' : 2x + 2y + z + D = 0$ pasa por P(2,1,-1)

$2.2 + 2.1 + (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \pi' : 2x + 2y + z - 5 = 0$

La recta es $s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

7

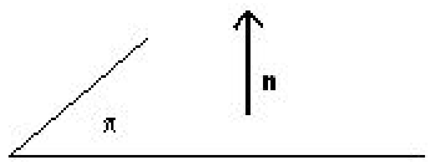
Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 4 de 2007.

Considera la recta r definida por $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$. Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:

(a) [1 punto] La recta r es perpendicular al plano π.

(b) [1'5 puntos] La recta r está contenida en el plano π.

Solución



π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$. Vector normal **n** = (2, -1, β)

r definida por $\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$. Punto A(1,0,1) y vector director **u** = (α , 4, 2)

(a)

Para que la recta r sea perpendicular al plano π, el vector normal del plano **n** y el vector director de la recta **u** han de ser paralelos, por tanto sus coordenadas proporcionales.

$\alpha /2 = 4/-1 = 2/\beta$.

Igualando y operando tenemos.

De $\alpha /2 = 4/-1$, obtenemos $\alpha = - 8$

De $4/-1 = 2/\beta$, obtenemos $\beta = - 1/2$

(b)

Para que la recta r esté contenida en el plano π, el punto de la recta debe pertenecer al plano y los vectores **n** y **u** han de ser perpendiculares, es decir su producto escalar valer 0.

Si A $\in \Re$, sustituyendo obtenemos $2 + \beta = 0$, de donde $\beta = - 2$

Como **n** y **u** son perpendiculares, **n • u** = ((2, -1, β)• (α , 4, 2) = $2\alpha - 4 + 2\beta = 0$. Sustituyendo el valor de $\beta = - 2$, nos resulta $\alpha = 4$

8

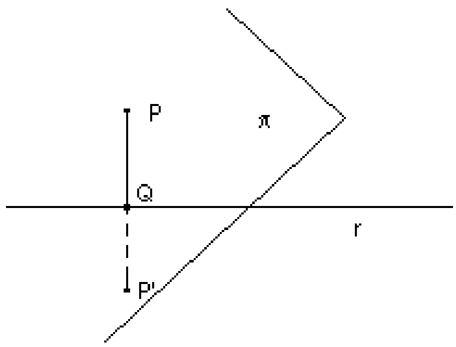
Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 4 de 2007.

[2’5 puntos] Calcula la distancia del punto P(1,−3,7) a su punto simétrico respecto de la recta definida por

$$3x - y - z - 2 = 0$$

$$x + y - z + 6 = 0$$

Solución



d(P,P’) = 2.d(P,Q), donde Q es la proyección ortogonal de P sobre la recta "r" y P’ es el simétrico del punto P respecto de la recta "r"

De la recta "r"

$$3x - y - z - 2 = 0$$

$$x + y - z + 6 = 0$$

Tomamos un punto A y un vector director **u**

Para el punto A hacemos x = 0, con lo cual sumando sale z = 2 e y = - 4, luego A(0, -4, 2)

	Un vector director de la recta es, **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(1 + 1) – **j**(-3 + 1) + **k**(3 + 1) = (2, 2, 4) Calculamos el plano π perpendicular a la recta "r" que pasa por el punto P(1,−3,7). Su vector normal **n** es el vector director de la recta **u** = (2, 2, 4) El plano pedido es 2x + 2y + 4z + K = 0. Le imponemos la condición de que pase por P(1,−3,7). 2(1) + 2(-3) + 4(7) + k = 0 , de donde K = -24 y el plano es 2x + 2y + 4z - 24 = 0. Simplificándolo x + y + 2z – 12 = 0 El punto Q es la intersección de la recta "r" con el plano, para lo cual ponemos la recta en paramétricas, y la sustituimos en el plano. x = 0 + 2m y = - 4 + 2 m z= 2 + 4m (2m) + (- 4 + 2m) + 2(2 + 4m) – 12 = 0 = 2m + 2m + 8m – 12 = 0, de donde m = 1 y el punto Q es Q(2(1), -4+2(1), 2+4(1)) = Q(2,-2,6) d(P,Q) = ||**PQ**|| = $\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ **PQ** = (2 – 1, -2 –(-3), 6 – 7) = (1, 1, -1) La distancia pedida es d(P,P') = 2.d(P,Q) = $2\sqrt{3}$ u.l.
9	**Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 5 de 2007.** (a) [1'5 puntos] Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación x + y + z =3√3 y π_2 de ecuación - x + y + z =2. (b) [1 punto] Halla la distancia de la recta r al plano π_1. **Solución** (a) Origen de coordenadas O(0,0,0) Plano π_1 de ecuación x + y + z =3√3. Su vector normal es **n** = (1,1,1) Plano π_2 de ecuación - x + y + z =2. Su vector normal es **n'** = (-1,1,1) Como la recta "r" pedida es paralela a ambos planos su vector director **u** es el producto vectorial de los vectores **n** y **n'.** **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1-1) – **j**(1+1) + **k**(1+1) = (0, -2, 2) La recta "r" pedida en paramétricas es (pasa por el origen de coordenadas) x= 0 y = -2m z= 2m, con m $\in \Re$

(b)

El vector director de la recta "r" es **u** = (0, -2, 2), que por su construcción es perpendicular al vector normal **n** del plano π_1, por tanto la recta y el plano son paralelos con lo cual la distancia de la recta "r" al plano "π_1" es la distancia de cualquier punto de la recta (el origen) al plano, es decir

$$d(r,\pi_1) = d(O,\pi_1) = \frac{|0+0+0+3\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3u.l.$$

10

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 5 de 2007.

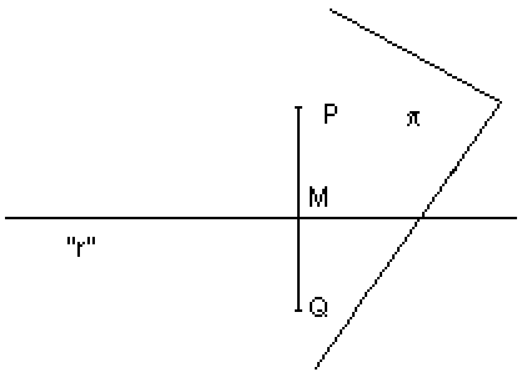
Considera el punto P(1,0, - 2) y la recta r definida por $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.

(b) [1 punto] Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

Solución

(a)



Punto P(1,0, - 2) y la recta r definida por $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$

Para calcular la "s" perpendicular a la recta "r" por el punto P, calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta "r" que será el punto M. La recta pedida es la recta que pasa por los puntos P y M.

Calculo el plano π perpendicular a la recta "r" que pasa por P. Su vector normal **n** es el vector director de la recta "r" el **u** que lo calcularemos como un producto vectorial.

n = **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ = **i**(4) – **j**(-8) + **k**(2 + 2) = (4,8,4)

El plano pedido es 4x + 8y + 4z + K = 0 y le imponemos la condición de que pase por el punto P(1,0, - 2)

4(1) + 8(0) + 4(-2) + K = 0, de donde K = 4, luego el plano π es 4x + 8y + 4z + K = 0 y simplificándolo un poco nos queda x + 2y + z + 1 = 0.

Calculamos ya M que es la intersección de "r" con "π ", para lo cual ponemos la recta "r" 1º en paramétricas.

2x – y = 5

2x + y – 4z = 7. Tomo x = λ con lo cual y = 2λ - 5 y z = λ - 3

x = λ

y = - 5 + 2λ

z = - 3 + λ

(λ) + 2(- 5 + 2λ) + (- 3 + λ) + 1 = 0, de donde λ = 2

El punto M es M((2), -5 + 2(2),. -3 + (2)) = M(2, -1, -1)

La recta "s" pedida es la que pasa por P(1,0, - 2) y M(2, -1, -1). Tomo como punto el P(1,0, - 2) y como vector director el **PM** = (2 – 1,-1 – 0, -1 – (-2)) = (1, -1, 1)

La recta "s" pedida en continua es (x – 1)/1 = (y – 0)/(-1) = (z + 2)/1

(b)

Según la construcción que hemos hecho en el apartado (a) resulta que el punto M (proyección ortogonal del punto P sobre la recta "r") es el punto medio del punto P y de su simétrico Q, por tanto:

d(P, Q) = 2.d(P,M) = 2.||**PM**|| = $2.\sqrt{1^2+1^2+1^2} = 2.\sqrt{3}$ u.l.

11 **Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 6 de 2007.**

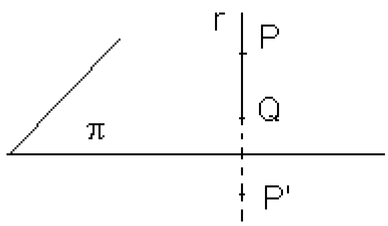
Considera el plano π de ecuación 2x + 2y− z− 6 =0 y el punto P(1,0,−1).

(a) [1’25 puntos] Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

(b) [1’25 puntos] Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π.

Solución

(a)



La recta "r" perpendicular al plano π de ecuación 2x + 2y− z− 6 = 0, tiene como vector director **u** el vector normal del plano **n**, luego **u** = **n** = (2, 2, - 1)

La ecuación de la recta "r" perpendicular a "π" que pasa por el punto P, en forma paramétrica es:

x = 1 + 2m

y = 0 + 2m

z = - 1 - m

(b)

Para calcular el punto P’ simétrico del punto P respecto a la recta "r", nos damos cuenta por el apartado (a) que el punto Q (intersección de la recta "r" con el plano "π") es el punto medio del segmento PP’

Para calcular Q = r ∩ π, sustituyo la recta en el plano y determino m.

2(1 + 2m) + 2(2m) − (- 1 - m)− 6 = 0. Operando 9m – 3 = 0, de donde m = 1/3.

El punto Q es Q(1 + 2(1/3), 2(1/3), - 1 – (1/3)) =Q(5/3, 2/3, -4/3)

Como Q es el punto medio del segmento PP’, tenemos que (5/3, 2/3, -4/3) = ((1+x)/2, y/2, (z-1)/2), de donde igualando miembro a miembro y despejando obtenemos que el punto simétrico P ‘ es P ‘(7/3, 4/3, -5/3)

12

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 6 de 2007.

Considera el plano π de ecuación 2x + 2y − z − 6 = 0 y la recta "r" definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$

(a) [1’25 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

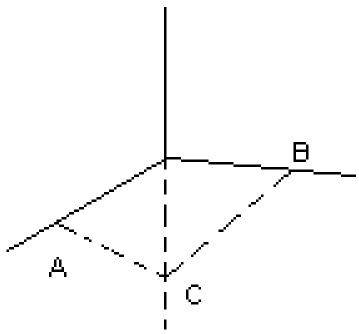
(b) [1’25 puntos] Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.

Solución

π de ecuación 2x + 2y − z − 6 = 0. Su vector normal es **n** = (2, 2, - 1)

recta "r" definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$. Punto de la recta M(1, -1, 0) y vector director **u** = (2, -1, 2)

(a)



Para calcular los vértices de los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas, ponemos la ecuación del plano en su forma segmentaria, y los números que dividan a la "x", la "y" y la "z" serán la abscisa, ordenada y cota de la intersección.

2x + 2y − z − 6 = 0

2x + 2y − z = 6. Dividimos todo por 6

x/3 + y/3 + z/(-3) = 1, por tanto los puntos de corte son A(3, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(0, 0, - 3)

(También se puede hacer como intersección de planos. Para el A se hace la intersección del plano dado con los planos y = 0 y z = 0)

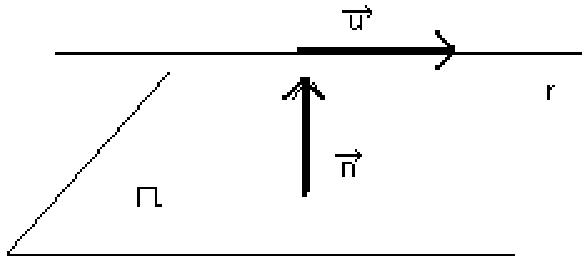
Recordamos que el área del triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**, y que el área del paralelogramo era el módulo del producto vectorial de dichos vectores, es decir.

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| **AB** = (-3,3,0) **AC** = (-3,0,-6)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ = **i**(-18) – **j**(-18) + **k**(9) = (- 18, - 18, 9)

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{18^2+18^2+9^2} = \frac{27}{2}\ u^2$

(b)



Como la recta "r" y el plano "π " son paralelos porque el vector normal del plano **n** = (2, 2, - 1) y el vector director de la recta "r" **u** = (2, -1, 2) son perpendiculares al ser su producto escalar cero (veámoslo)

n• u = (2, 2, - 1)• (2, -1, 2) = 2 – 2 – 2 = 0

resulta que la distancia de la recta "r" al plano "π " es la distancia de un punto cualquiera de la recta, el M(1,-1,0) al plano "π ", es decir d("r", "π ") = d(M, "π ") = $\frac{|2(1)+2(-1)+0-6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2u.l.$

13

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 1 de 2006.

Sea r la recta de ecuación $\begin{cases} x = a+t \\ y = 1-2t \\ z = 4-t \end{cases}$ y s la recta de ecuación (x -1)/2 = (y + 2)/1 = z/3

(a) [1'5 puntos] Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.

(b) [1 punto] Calcula el punto de corte.

Solución

(a)

De r ≡ $\begin{cases} x = a+t \\ y = 1-2t \\ z = 4-t \end{cases}$ tomamos un punto A(a,1,4) y un vector director **u** = (1,-2,-1)

De s ≡ (x -1)/2 = (y + 2)/1 = z/3 tomamos un punto B(1,-2,0) y un vector director **v** = (2,1,3)

Evidentemente las rectas se cortan o se cruzan porque los vectores **u** y **v** no son proporcionales.

Las rectas se cortan si y solo si det(**AB**,**u**,**v**) = 0

AB = (1-a, -3,-4)

det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} 1-a & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ (1-a)(-6+1) –(-3)(3+2) + (-4)(1+4) = -10 + 5a = 0, de donde a = 2 para que las rectas se corten.

(b)

Para calcular el punto de corte ponemos ambas rectas en paramétricas con parámetros distintos e igualamos x = x, y = y y z = z

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = 4-t \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 1+2m \\ y = -2+m \\ z = 3m \end{cases}$$

Igualamos x = x x = y 2+t = 1+2m 1-2t = -2+m

Resolviendo este sistema obtenemos t = m = 1, lo cual verifica z = z, por tanto el punto de corte es

P(2+(1),1-2(1),4-(1)) = P(3,-1,3)

14

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 1 de 2006.

[2’5 puntos] Halla un punto A de la recta r de ecuación x = y = z y un punto B de la recta s de

ecuación x = y/(-1) = (z + 1)/2 de forma que la distancia entre A y B sea mínima.

Solución

Veamos primero la posición relativa de las rectas r y s para lo cual tomamos un punto y un vector directo de cada una de ellas.

De r punto M(0,0,0) y vector **u** = (1,1,1)

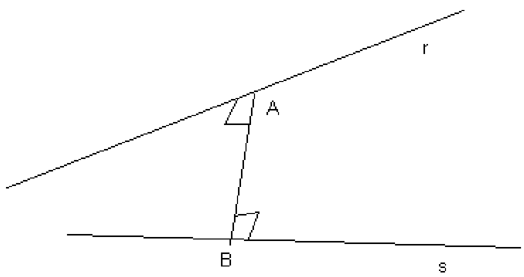
De s punto N(0,0,-1) y vector **v** = (1,-1,2)

Como los vectores u y v no son proporcionales las rectas se cortan o se cruzan.

MN = ((0,0,-1)

Si det(**MN,u,v**) = 0 las rectas se cortan y si det(**MN,u,v**) $\neq$ 0 las rectas se cruzan

det(**MN,u,v**) = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ (-1)(-1-1) = 2 $\neq$ 0, por tanto las rectas se cruzan



En realidad lo que me están pidiendo son los puntos A y B que hacen mínima la distancia entre ellas. Tomaremos un punto genérico de la recta r, el A, otro genérico de la recta s, el B, con parámetros distintos. Formaremos el vector AB y le impondremos la condición de que sea perpendicular a la vez al vector directo de la recta s y de la recta r (Su productos escalares serán cero). Luego resolveremos el sistema y obtendremos los puntos pedidos

A(a,a,a); B(b, -b, -1+2b); **AB** =(b-a, -b-a, -1+2b-a)

AB• u = b-a-b-a-1+2b-a = -3a + 2b-1 = 0

AB• v = b-a+b+a-2+4b-2a = -2a + 6b-2 = 0

	Resolviendo el sistema -3a + 2b-1 = 0 -2a + 6b-2 = 0, obtenemos de soluciones a = -1/7 y b = 2/7. Por tanto los puntos pedidos son A(-1/7, -1/7, -1/7) y B(2/7, -2/7, -1- 4/7) B(2/7, -2/7, -11/7) Vamos a calcular dicha distancia. d(r,s)= d(A,B) = ||**AB**|| AB = (2/7+1/7, -2/7+1/7, -11/7+1/7) = (3/7, -1/7, -10/7) d(r,s)= d(A,B) = ||**AB**|| = $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{10}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{110}{7^2}} = \frac{\sqrt{110}}{7}$ $u.l.$
15	**Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2006** [2'5 puntos] Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación x + z = 1 y del plano π ' de ecuación y – z = 3. **Solución** Pasamos la recta a vectorial. $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z-3}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z-3}{2} = a \end{cases}$, siendo "a" un parámetro, por tanto la ecuación de la recta en vectorial es (x, y, z) = (0, 1 + a, 3 + 2a) y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta P(0,1+a,3+2a), con a $\in \Re$. Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π ', tenemos que d(P, π) = d(P, π ') d(P, π) = $\frac{\|0+2a+3-1\|}{\sqrt{2}}$ d(P, π ') = $\frac{\|a+1-2a-3-3\|}{\sqrt{2}}$ Igualando ambas expresiones y simplificando tenemos |2a+2| = |-a - 5|, de donde salen las ecuaciones 2a + 2 = -a - 5 y 2a + 2 = a + 5 . De 2a+2 = -a - 5, operando sale a = -7/3 y un punto es P(0,1-7/3,3-14/3) = P(0, -4/3, -5/3) De 2a+2 = a + 5, operando sale a = 3 y el otro punto es P'(0,1+3,3+2(3)) = P'(0, 4, 9)
16	**Ejercicio n° 4 de la opción B de septiembre de 2006** Considera los puntos A(1,0,-2) y B(-2,3,1) (a) [1 punto] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales (b) [1'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación -x = y – 1 = z. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

Solución

(a)

A(1,0,-2) y B(-2,3,1)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores **AB** = 3**AM**

AB = (-3,3,3)

AM = (x-1,y,z+2)

De **AB** = 3**AM** obtenemos (-3,3,3) = (3x-3,3y,3z+6), e igualando miembro a miembro se tiene x = 0, y = 1 y z = -1, es decir el punto M es M(x,y,z) = M(0,1,-1)

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir

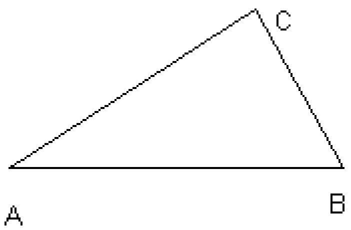
N(x,y,z)= N(-2/2, (1+3)/2, (-1+1)/2) = N(-1,2,0)

(b)

Antes de calcular el área del triángulo de vértices A, B y C ponemos la recta r en forma continua *¡¡cuidado, pues no me la han dado en forma continua!!*

-x = y – 1 = z en forma continua es x/(-1) = (y-1)/1 = z/1.

Un punto de la recta es C(0,1,0) y un vector director de la recta es **u** = (-1,1,1)



Recordamos que el área del triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**, y que el área del paralelogramo era el módulo del producto vectorial de dichos vectores, es decir.

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**||

AB = (-3,3,3)

AC = (-1,1,2)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(3) – **j**(-3) + **k**(0) = (3,3,0)

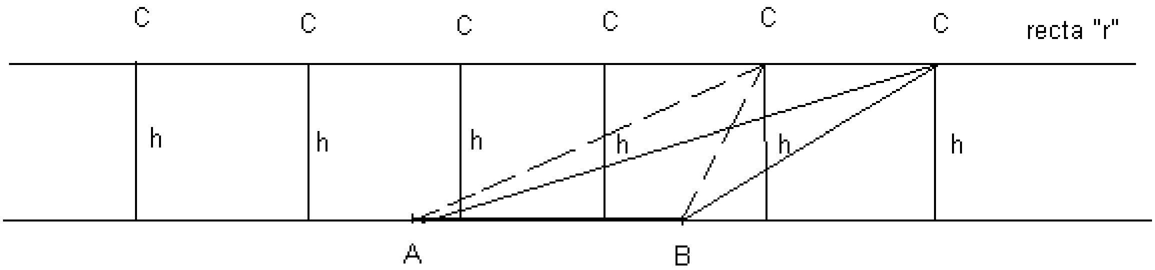
Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$

Para responder a la pregunta ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C? hay que recordar también que el área de un triángulo es 1/2 del producto de la base (en nuestro caso el módulo del vector **AB**) por la altura.

Resulta que la recta "r" que me han dado x/(-1) = (y-1)/1 = z/1 es paralela al segmento AB, puesto que el vector director de la recta es **u** = (-1,1,1) y el vector **AB** = (-3,3,3) son proporcionales.

Evidentemente el segmento AB no está contenido en la recta porque en dicho caso no se podría formar triángulo y nos resultaría el área 0.

Al ser la recta "r" paralela al segmento AB, la altura de cualquier punto C de la recta trazada sobre la recta que contiene al segmento AB siempre es la misma, por tanto el área del triángulo siempre es $\frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$, independientemente del punto de la recta que tomemos.



Área = (1/2)(base)(altura) = (1/2)||**AB**||.h, y h no varía sea cual sea el punto C de la recta "r".

Otra forma de hacerlo (Javier Costillo)

Consideramos un punto C genérico de la recta - x = y – 1 = z = a con "a" número real.

C(x,y,z) = C(-a, 1+a, a)

Si en el cálculo del área del triángulo vemos que no depende del parámetro "a", entonces el área será la misma independientemente del punto C de la recta que tomemos

A(1,0,-2) y B(-2,3,1)

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**||

AB = (-3,3,3)

AC = (-a - 1,1 + a, a + 2)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -a-1 & 1+a & a+2 \end{vmatrix}$ = **i**(3a+6-3-3a) – **j**(-3a – 6 + 3a + 3) + **k**(-3 -3a + 3a + 3) = (3,3,0)

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$, que no depende del parametro "a" y por tando tampoco del punto C elegido de la recta.

17

Ejercicio n° 4 de la opción A de junio de 2006

Considera el plano π de ecuación 2x + y – z + 2 = 0 y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$.

(a) [1 punto] Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.

(b) [0'751 puntos] Para m = - 3, halla el plano que contiene a lo recta r y es perpendicular al plano π .

(c) [0'5 puntos] Para m = - 3, halla el plano que contiene a lo recta r y es paralelo al plano π .

Solución

(a)

Ponemos la recta "r" en paramétricas, la sustituimos en el plano y obtenemos una ecuación en un parámetro "b". Cuando exista solución para dicho parámetro la recta cortará al plano

Recta "r" $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$, punto A(5,0,6). Vector directo u = (-2, 1, m)

Recta "r" en paramétricas $\begin{cases} x = 5 - 2b \\ y = \quad b \\ z = 6 + mb \end{cases}$

Sustituimos la recta en el plano π

2(5 – 2b) + (b) – (6 + mb) + 2 = 0 = b(-3 - m) + 6, de donde b = 6/(3 + m) lo cual tiene solución si el denominador no es cero, es decir si m ≠ -3.

Luego para cualquier valor de m distinto de -3 la recta corta al plano en un solo punto, pues la solución de "b" es única. Sin embargo par m = -3 la recta es paralela al plano

(c)

Para m = -3 la recta es paralela al plano, luego el plano pedido es de la forma 2x + y - z + K = 0, le imponemos la condición de que pase por un punto de la recta, el A(5,0,6) y tenemos 2(5) + (0) - (6) + K = 0, de donde K = -4 yelplano pedido es 2x + y - z - 4 = 0

(b)

Lo hacemos por haz de planos a partir de la recta

Ponemos la recta "r" $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$ en implícitas para lo cual igualamos dos a dos.

$\frac{x-5}{-2} = y$ e $y = \frac{z-6}{-3}$, de donde nos queda $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$

Formamos el haz de planos (x + 2y – 5) + b(3y + z – 6) = 0 y lo consideramos como un plano π ’ de ecuación x + (2 + 3b)y + bz + (-5 – 6b) = 0 con vector normal n’ = (1, 2 + 3b, b)

El plano π de ecuación 2x + y – z + 2 = 0 tiene de vector normal n = (2,1,-1)

Como me dicen que el plano que contiene a la recta tiene que ser perpendicular al plano π , los vectores normales también son perpendiculares y su producto escalar cero, es decir.

n• n’ = 0 = (2,1,-1) • (1, 2 + 3b, b) = 2 + 2 +3b – b = 4 + 2b, de donde b = -2 y el plano pedido es (x + 2y – 5) + (-2)(3y + z – 6) = 0 = x – 4y – 2z + 7 = 0

Otra forma de hacerlo (mas sencilla) gracias a Dª Vicenta Serrano Gil

Formamos el plano pedido tomando un punto y dos vectores, el punto de la recta A(5,0,6), uno de los vectores el director de la recta **u** = (-2,1--3) y otro el normal del plano **n** = (2,1,-1). El plano pedido se calcula resolviendo el determinante det(**x - a**, **u**, **n**) = 0, yobtenemos el mismo resultado x - 4y - 2z + 7 = 0

18	

Ejercicio nº 4 de la opción B de junio de 2006

Considera el punto P(3, 2, 0) y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

(b) [1.5 puntos] Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

Solución

(a)

Expresamos r en paramétricas: $\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 4 + 3\alpha \quad \alpha \in \Re \\ z = \alpha \end{cases}$

La ecuación del plano pedido la construimos considerando como vectores direccionales del mismo $\overrightarrow{u_r} = (-2,3,1) \quad \overrightarrow{PP_r} = (-4,2,0)$. Pudiendo considerar vectores de componentes proporcionales que tendrán la misma dirección:

Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 4z - 7 = 0$

(b)

Sea M el punto medio del segmento PQ, M es un punto de la recta que verifica la siguiente condición: $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$. Desarrollando la condición del producto escalar nulo obtenemos:

$$\overline{PM} \cdot \overline{u_r} = 0 \Rightarrow (-4 - 2\alpha, 2 + 3\alpha, \alpha) \cdot (-2,3,1) = 0 \Rightarrow 8 + 4\alpha + 6 + 9\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones paramétricas de r obtenemos el punto M:

$M = (1,1,-1)$. Puesto que M es el punto medio del segmento PQ, se tiene:

$$\frac{3 + q_1}{2} = 1 \Rightarrow q_1 = -1$$
$$\frac{2 + q_2}{2} = 1 \Rightarrow q_2 = 0$$
$$\frac{q_3}{2} = -1 \Rightarrow q_3 = -2$$

Con lo cual el simétrico es el punto Q =(-1, 0, -2)

19	

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 4 de 2006.

Sea r la recta de ecuación (x – 5)/2 = (y+2)/(-1) = z/4 y s la recta dada por $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$

(a) [1’5 puntos] Determina la posición relativa de ambas rectas.

(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución

(a)

De la recta r (x – 5)/2 = (y+2)/(-1) = z/4 tomamos un punto A(5, -2 0) y un vector director **u** = (2, -1, 4)

De la recta s $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$ tomamos un punto B(5, -2 0) y un vector director **v**

Para el punto hacemos z = 0 y nos queda el sistema

3x – 2y = 2

-x + 2y = 2, que al resolverlo nos da x = 2 e y = 2, por tanto el punto es B(x,y,z) = B(2, 2, 0)

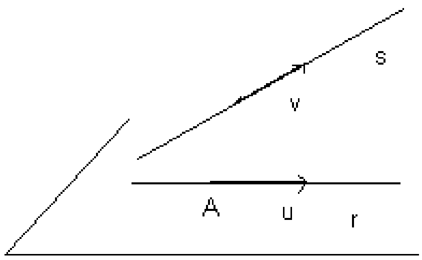
v = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$ **i**(6-2) – **j**(-9+1) + **k**(6 – 2)= (4, 8, 4)

Como los vectores **u** y **v** no son proporcionales las rectas se cortan o se cruzan. Para ver en que caso estamos tenemos que ver si es 0 o nó el determinante det(**AB**, **u**, **v**)

AB =(-3, 4, 0)

det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 140 \neq 0$, por tanto las rectas se cruzan

(b)



Como el plano contiene a la recta r un punto del plano es A y un vector del plano es **u.** Como el plano es paralelo a la recta s el otro vector paralelo del plano es el **v**.

$\pi \equiv$ det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$ (x-5)(-4-32) – (y-2)(8-16) + z(16+4) = -36x + 8y + 20z + 164 = 0

20

Ejercicio 4 de la *Opción* B del modelo 4 de 2006.

Considera la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$

(a) [1’25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ .

(b) [1’25 puntos] Calcula la proyección ortogonal del punto A(1, 2, 1) sobre la recta r.

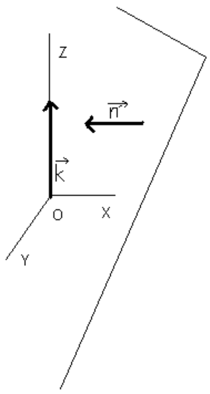
Solución

(a)

Formamos el haz de plano de terminado por la recta $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ que es (x+y+z-1) + m(x-2y+3z)= 0

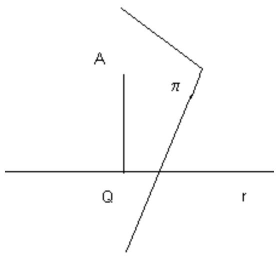
Ordenándolo (1+m)x + (1-2m)y + (1+3m)z + (-1) = 0. Un vector normal genérico sería **n’** = (1+m, 1-2m, 1+3m)

Como el plano pedido no puede cortar al eje OZ el vector normal del plano **n’** y el director del eje **k** = (0,0,1) han de ser perpendiculares, es decir su producto escalar ha de ser cero, es decir **k • n’** = 0



k • n’ = 0 = 1 + 3m = 0, de m = -1/3 y el plano pedido es (x+y+z-1) + (-1/3)(x-2y+3z)= 0

(b)



Calculamos el plano π que pasa por A(1, 2, 1) y es perpendicular a r. Su vector normal **n** será el director de r, **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$ **i**(5) – **j**(2) + **k**(-3)= (5, -2, -3).

El plano π es 5(x – 1) – 2(y – 2) – 3(z – 1) = 5x – 2y - 3z + 2 = 0

El punto Q proyección ortogonal del punto A sobre la recta r es la intersección de la recta r con el plano π

Ponemos la recta r $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ en vectorial. Ya hemos visto que un vector director es **u** = (5, -2, -3). Calculamos ahora un punto suyo M, para lo cual hacemos z = 0 y nos queda y = 1/3 y x = 2/3, es decir M(2/3, 1/3, 0)

La recta r en vectorial sería (x, y, z) = (2/3 + 5m, 1/3 – 2m, -3m) con m $\in \Re$. Sustituimos r en π y obtenemos el valor del parámetro m.

5(2/3 + 5m) – 2(1/3 – 2m) – 3(-3m) + 2 = 0. Operando nos queda 38 m + 14/3 = 0, de donde m = -7/57 , y el punto buscado es Q(2/3 + 5(-7/57), 1/3 – 2(-7/57), -3(-7/57)) = Q(1/19, 11/19, 7/19)