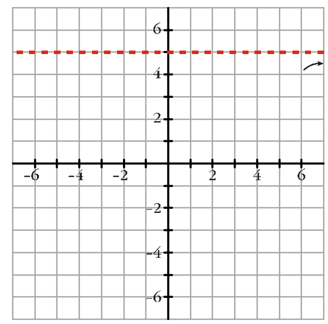
SOLUCIONES: CÁLCULO DE LÍMITES Y DERIVADAS

Ejercicio nº 1.-**Representa gráficamente y explica el significado de la expresión:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-1}{x^2+2x} = 5$$

Solución:

Podemos conseguir que $\frac{5x^2-1}{x^2+2x}$ esté tan próximo a 5 como queramos dando a x valores suficientemente grandes.



Con más precisión:

Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un número h tal que, si $x > h$, entonces

$$\left| \frac{5x^2-1}{x^2+2x} - 5 \right| < \varepsilon.$$

Ejercicio nº 2.-**Halla los siguientes límites:**

a) $\lim_{x\to+\infty} \left[2^x - x^2\right]$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty} \left[2^x - x^2\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

Ejercicio nº 3.-**Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}}$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right]$

Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+3x}-2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+2x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-4x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}+2x} = -\infty$$

Ejercicio nº 4.- **Halla:**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2}{4+5x}-1\right)\cdot\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2-4-5x}{4+5x}\right)\cdot\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-12x}{12+15x}}=e^{\frac{-12}{15}}=e^{\frac{-4}{5}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x-2}{-3x+5}\right)^{x^2-1}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

Ejercicio nº 5.- **Halla el valor del siguiente límite:**

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=\frac{9}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=-\infty\ ;\qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=+\infty$$

Ejercicio nº 6.- **Estudia la continuidad de la función:**

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 4+\ln x & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

Solución:

- Dominio $=\mathbb{R}$
- Si $x\neq 0$ y $x\neq 1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2+1\right)=1\\ f(0)=1\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es continua en } x=0.$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+1\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(4 + \ln x\right) = 1 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

- Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

***Ejercicio nº 7.-*Calcula los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si} \quad x \le 1 \\ 4x^2 + ax + b & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 3x + b & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}}$$

Solución:

- Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2 - 2x\right) = a - 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(4x^2 + ax + b\right) = 4 + a + b \\ f(1) = 4 + a + b \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua $x = 1$, ha de ser:

$$a - 2 = 4 + a + b \;\rightarrow\; b = -6$$

- En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(4x^2 + ax - 6\right) = 10 + 2a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x - 6\right) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de ser:

$$10 + 2a = 0 \;\rightarrow\; 2a = -10 \;\rightarrow\; a = -5$$

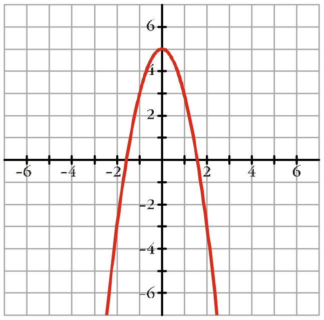
- Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = -5$ y $b = -6$.

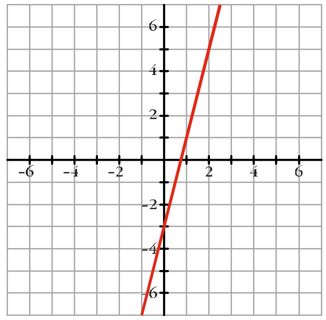
Ejercicio nº 8.-

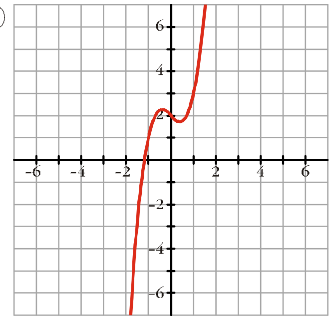
Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

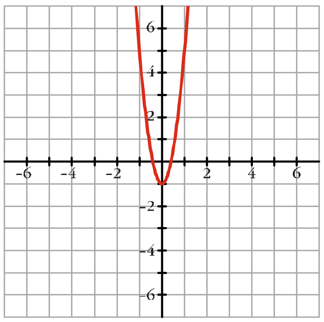
¿Cuál es la derivada de cual?

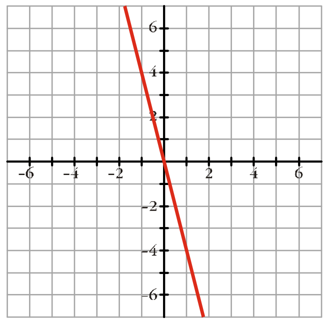
Justifica tus respuestas.

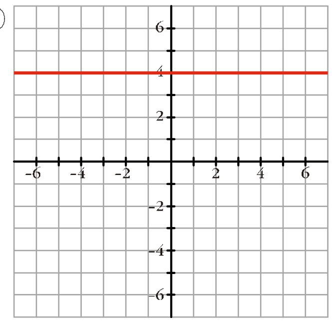
①


②


③


Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Solución:

1 – B, 2 – C, 3 – A.

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece.

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida del siguiente modo:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & \text{si} \quad x<0\\ x^2+2 & \text{si} \quad 0\le x<1\\ 3x+1 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}}$$

Solución:

CONTINUIDAD

Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

La función es continua pues $f(x)$ es una función polinómica en cada uno de estos tres intervalos.

Para $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2+2\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2\right)=2\\ f(0)=2\end{array}\right\} \rightarrow \ f(x) \text{ es continua en } x=0$$

Para $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2\right)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1)=4\end{array}\right\}\rightarrow \text{ Discontinu a en } x=1$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$

DERIVABILIDAD

Si $x\neq 0$ y $x\neq 1$, $f(x)$ es derivable y:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si} \quad x<0\\ 2x & \text{si} \quad 0<x<1\\ 3 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

Para $x=0$.

$f'(0^-)=0=f'(0^+)=0$

La función es derivable en $x=0$.

Para $x=1$.

La función no es derivable pues no es continua.

Por tanto:

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

***Ejercicio nº 10.-*Calcula la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y=5\cdot arctg(2x-1)$ **b)** $y=\sqrt[3]{x^5+2}$

Solución:

a) $y'=\dfrac{5\cdot 2}{1+(2x-1)^2}=\dfrac{10}{1+(2x-1)^2}$

b) $y'=\dfrac{5x^4}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^5+2\right)^2}}$

***Ejercicio nº 11.-*Deriva logarítmicamente la siguiente función:**

$y=(cos\ x)^x$

Solución:

$f(x)=(cos\ x)^x$

$ln\ f(x)=x\cdot ln\ cos\ x$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=ln\cos x+x\cdot\dfrac{-sen\ x}{cos\ x}=ln\cos x-x\cdot tg\ x$

$f'(x)=f(x)\cdot(ln\ cos\ x-x\ tg\ x)=(cos\ x)^x\cdot(ln\ cos\ x-x\ tg\ x)$