RELACIÓN DE PROBLEMAS DE ANÁLISIS (PRUEBA 2005)

EJERCICIO 1.

Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) **(1 punto)** Obtenga la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = -1$.

b) **(0.5 puntos)** Halle su punto de inflexión.

c) **(1.5 puntos)** Dibuje la gráfica de la función, estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos.

EJERCICIO 2.

a) **(1.5 puntos)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x) = 1 + \mathrm{L}(2x-1)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) **(1 punto)** Deduzca razonadamente las asíntotas de la función g, definida de la forma

$$g(x) = \frac{3-x}{x-2}.$$

c) **(0.5 puntos)** Determine la posición de la gráfica de la función g respecto de sus asíntotas.

EJERCICIO 3.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) **(0.5 puntos)** Calcule sus asíntotas.

c) **(1 punto)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 4.

El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \quad 4 \leq t \leq 7.$$

a) **(1.5 puntos)** Represente la gráfica de la función f.

b) **(1.5 puntos)** ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?

EJERCICIO 5.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Dibuje la gráfica de f y estudie su monotonía.

b) **(0.75 puntos)** Calcule el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es -1.

c) **(0.75 puntos)** Estudie la curvatura de la función.

EJERCICIO 6.

(3 puntos) Sea f la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+bx+3 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}.$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

EJERCICIO 7.

a) **(1.5 puntos)** Determine a y b en la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+5$ sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto (2, 9).

b) **(1.5 puntos)** Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$.

EJERCICIO 8.

(3 puntos) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma

$$f(x)=x^2+\frac{16}{x^2};\quad g(x)=\left(x^2+9\right)^3;\quad h(x)=\mathrm{L}\left(x^2+1\right).$$

EJERCICIO 9.

El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por la función $f(t)=-4t^2+60t-15,\quad 1\leq t\leq 8$.

a) **(1 punto)** ¿Cuál será el valor de las existencias para $t=2$? ¿Y para $t=4$?

b) **(1 punto)** ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?

c) **(1 punto)** ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

EJERCICIO 10.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x-\dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x\leq 4 \\ 2x-8 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.

b) **(1.5 puntos)** Represéntela gráficamente e indique, a la vista de la gráfica, su monotonía y sus extremos.

EJERCICIO 11.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2+ax & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Para $a=-2$ represente gráficamente la función f, e indique sus extremos relativos.

b) **(1.5 puntos)** Determine el valor de a para que la función f sea derivable.

EJERCICIO 12.

Sea la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

a) **(2 puntos)** Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente esta función.