

Intervalo de confianza para la proporción.

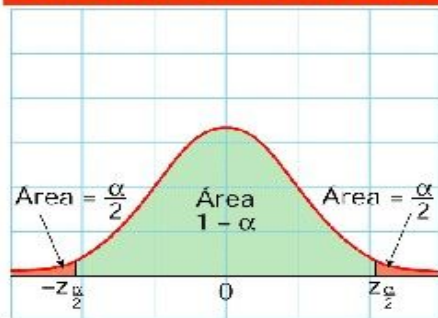
Consiste en estimar la proporción real p a partir de la proporción muestral \hat{p} .

Si $n \geq 30$, por el Teorema Central del Límite, el intervalo de confianza para p con un nivel de confianza de $(1-\alpha).100\%$ es:

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \right)$$

- $z_{1-\alpha/2}$ es el **valor crítico**: valor de la abscisa de una distribución $N(0, 1)$ que deja a su izquierda una probabilidad de $1 - \alpha/2$.
- El valor $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ se llama **error máximo admisible**.

Valores críticos más usuales



$$\Pr(-z_{\alpha/2} < Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$1 - \alpha$	0,8	0,9	0,95	0,99
α	0,2	0,1	0,05	0,01
$\alpha/2$	0,1	0,05	0,025	0,005
$z_{\alpha/2}$	1,28	1,64	1,96	2,58

PROBLEMAS PROPUESTOS (SELECTIVIDAD)

1. Tomada, al azar, una muestra de 120 estudiantes de una Universidad, se encontró que 54 de ellos hablaban inglés. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes que hablan el idioma inglés entre los estudiantes de esa Universidad.

Solución: $I = (0,3753, 0,5247)$.

2. Con los datos del ejercicio anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir que la cota del error que se comete al estimar, por un intervalo de confianza, la proporción de alumnos que hablan inglés en esa Universidad no sea superior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%. ¿Cuántos alumnos tendríamos que tomar, como mínimo, en la muestra?

Solución: $n = 657$.

3. Tomada una muestra aleatoria de 300 personas mayores de edad de una gran ciudad, se obtuvo que 105 habían votado a un determinado partido X. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza que permita estimar la proporción de votantes del partido X en esa ciudad.

Solución: $I = (0,305, 0,395)$.

4. En una muestra aleatoria de 300 personas mayores de edad de una gran ciudad se encontró que 105 leían un determinado periódico X. A la vista de esos datos se pretende seleccionar una nueva muestra para conseguir una cota de error de 3 centésimas como máximo, con un nivel de confianza del 95%, para la estimación de la proporción de lectores de ese periódico por medio de un intervalo de confianza. Deduzca el número de individuos de la población que, como mínimo, debe tener la muestra.

Solución: $n = 972$.

5. Se desea estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n . Si el porcentaje de individuos daltónicos en una muestra aleatoria es igual al 30%, calcule el valor mínimo de n para que, con un nivel de confianza del 95%, el error que se cometa en la estimación sea inferior a 0,031.
Solución: $n = 840$.
6. Para estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción p de individuos miopes de una población, se ha tomado una muestra de 80 individuos con la que se ha obtenido un porcentaje de individuos miopes del 35%. Determine, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de miopes de toda la población.
Solución: $I = (0,213, 0,487)$.
7. En una encuesta realizada a 500 mujeres adultas de una población se encontró que 300 de ellas están casadas actualmente. Construya con estos datos un intervalo de confianza, con un nivel del 90%, para la proporción de mujeres adultas actualmente casadas en esa población.
Solución: $I = (0,564, 0,636)$.
8. Una muestra aleatoria de automóviles tomada en una zona turística ha permitido obtener un intervalo de confianza, al nivel del 95%, para estimar de la proporción de matrículas extranjeras de esa zona, siendo sus extremos 0,232 y 0,368.
a) Determine el valor de la proporción estimada a través de esa muestra y una cota del error de estimación a este nivel de confianza.
b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería la cota de error, si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 696 matrículas?
Solución: a) $\hat{p} = 0,3$ y la cota del error 0,068. b) Cota del error 0,034.
9. Para conocer la audiencia de uno de sus programas (proporción de televidentes que lo prefieren), una cadena de TV ha encuestado a 1000 personas elegidas al azar obteniendo una proporción muestral del 33% de personas favorables a ese programa. Calcule una cota del error de estimación, por medio de un intervalo de confianza, con un nivel del 92%.
Solución: Cota del error 0,026.
10. Se va a tomar una muestra aleatoria de 600 recién nacidos en este año en una ciudad para estimar la proporción de varones entre los recién nacidos de esa ciudad, mediante un intervalo de confianza con un nivel del 95%.
¿Cuál será el error de estimación a ese nivel si se observan 234 varones en la muestra?
Solución: Cota del error 0,039.
11. Para estimar la proporción de familias con un solo hijo en una ciudad, se ha tomado una muestra de familias al azar, de las cuales el 30% tiene un solo hijo. ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que, con esos datos, un intervalo de confianza de esa proporción a un nivel del 95% tenga una cota de error de 0,06, como máximo?
Solución: $n = 225$.
12. Una cadena de TV quiere saber si la audiencia de uno de sus programas sigue manteniéndose en el 25% de los espectadores.
¿Cuántos espectadores se deberían encuestar al azar, como mínimo, para tener un nivel de confianza del 90% de que el error en la estimación de la proporción actual sea igual o inferior a 0,03?
Solución: $n = 564$.
13. Calcule el tamaño mínimo de una muestra aleatoria de jóvenes entre 18 y 25 años para tener una confianza del 95% de que el error que se cometerá al estimar la proporción de fumadores entre esas edades no sea superior a 0,05, sabiendo que en una encuesta previa se ha encontrado un 32% de fumadores entre estos jóvenes.
Solución: $n = 335$.

14. Se va a tomar una muestra aleatoria de 600 recién nacidos en este año en una ciudad para estimar la proporción de varones entre los recién nacidos de esa ciudad, mediante un intervalo de confianza con un nivel del 95%. ¿Con qué proporción estimada será máxima la amplitud de ese intervalo? ¿Cuál es la amplitud máxima?
Solución: $\hat{p} = 0,5$. Amplitud máxima 0,08.
15. Para estimar la proporción de consumidores que prefieren un determinado refresco, por medio de un intervalo de confianza, se ha tomado una muestra al azar de 1075 consumidores, entre los que se han encontrado 516 que lo prefieren. Determine una cota del error cometido para esa estimación a un nivel de confianza del 95%.
Solución: Cota del error 0,030.
16. En una muestra aleatoria de 600 coches de una ciudad, 120 son de color blanco. Construya un intervalo de confianza de la proporción de coches de color blanco con un nivel de confianza del 98%.
Solución: $I = (0,162, 0,238)$.
17. Se estima la proporción de varones adultos, residentes en una población, con obesidad severa ($30 < \text{IMC} \leq 40$), mediante una muestra aleatoria de tamaño 500. Se obtiene una estimación de varones con obesidad severa del 18%. Utilizando un nivel de confianza del 98%, ¿cuál es el error máximo que se cometerá al estimar, por medio de un intervalo de confianza, esa proporción?
Solución: Cota del error 0,04.
18. Se desea estimar la proporción de adultos que leen un determinado diario local por medio de un intervalo de confianza. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra que garantice, aún en la situación más desfavorable, un error de la estimación inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 95%.
Solución: $n = 1068$.
19. Se estima, por un intervalo de confianza, la proporción de hogares con conexión a Internet utilizando una muestra aleatoria y con un nivel de confianza del 96%. Se obtiene así, una proporción estimada del 28%, con un error máximo del 6%. ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra utilizada?
Solución: $n = 236$.
20. Mediante una muestra aleatoria de tamaño 400 se estima la proporción de residentes en Sevilla que tienen intención de asistir a un partido de fútbol entre el Betis y el C.F. Sevilla. Si para un nivel de confianza del 95% resulta un error máximo en la estimación del 3%. Obtenga el valor de la estimación, sabiendo que es inferior a 0,25.
Solución: $\hat{p} = 0,105$.
21. En el diario "CÓRDOBA" del día 20 de Enero de 2.004 se publicó el resultado de un sondeo sobre intención de voto en las elecciones al Parlamento Andaluz del 14 de marzo de 2.004. Según la ficha técnica de la encuesta, el tamaño de la muestra fue de 5000 individuos, el nivel de confianza utilizado del 95%, y el error máximo de la estimación de los que no tienen decidido el voto del 1%.
En la página 2, del mencionado diario, se estima que el 13,3% de los andaluces no tienen decidido el voto.
Analice la coherencia del resultado de la estimación con la ficha técnica de la encuesta, si se utiliza un muestreo aleatorio simple.
Solución: Cota de error en la estimación $0,0094 \leq 0,01$, los resultados publicados son coherentes con la teoría del muestreo aleatorio simple.