RESUELVE Y COMPRUEBA: PROGRESIONES

Ejercicio nº 1.-

a) Obtén los cinco primeros términos de cada una de estas sucesiones:

a.1) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 3a_{n-1} - 8 \end{cases}$

a.2) $b_n = \dfrac{n-3}{2n+1}$

b) Escribe el término general de las sucesiones:

b.1) 5; 5,5; 6; 6,5; 7; ...

b.2) –1, –4, –16, –64, ...

b.3) $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5}, \ldots$

Solución:

a)

a.1) $a_1 = 5,\ a_2 = 7,\ a_3 = 13,\ a_4 = 31,\ a_5 = 85$

a.2) $b_1 = -\dfrac{2}{3},\ b_2 = -\dfrac{1}{5},\ b_3 = 0,\ b_4 = \dfrac{1}{9},\ b_5 = \dfrac{2}{11}$

b)

b.1) Es una progresión aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 0{,}5$. Por tanto:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 5 + 0{,}5n - 0{,}5 = 0{,}5n + 4{,}5 \rightarrow a_n = 0{,}5n + 4{,}5$

b.2) Es una progresión geométrica con $a_1 = -1$ y $r = 4$. Por tanto:

$a_n = (-1) \cdot 4^{n-1}$

b.3) $a_n = \dfrac{1}{n}$

Ejercicio nº 2.-

En una progresión aritmética, el sexto término vale 10,5; y la diferencia es 1,5. Calcula el primer término y la suma de los 9 primeros términos.

Solución:

$a_1 = a_6 - 5d = 10{,}5 - 5 \cdot 1{,}5 = 10{,}5 - 7{,}5 = 3 \rightarrow a_1 = 3$

$a_9 = a_1 + 8d = 3 + 12 = 15$

$S_9 = \dfrac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} = \dfrac{(3 + 15) \cdot 9}{2} = 81$

Ejercicio nº 3.-

En una progresión geométrica, $a_1 = 3$ y $a_4 = 24$. Calcula la razón y la suma de los ocho primeros términos.

Solución:

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 24 = 3 \cdot r^3 \rightarrow 8 = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow r = 2$$

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384$$

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Calcula la suma de todos los términos de la sucesión:

20; 2; 0,2; 0,02; 0,002; ...

Solución:

Es una progresión geométrica con $a_1 = 20$ y razón:

$$r = \frac{2}{20} = 0{,}1$$

Por tanto:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{20}{1 - 0{,}1} = \frac{20}{0{,}9} = 22{,}\widehat{2}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética. Sabiendo que el mayor de ellos mide 105°, ¿cuánto miden los otros dos?

Solución:

Los ángulos son a_1, a_2 y a_3. Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_3 - 2d = 105° - 2d \\ a_2 = a_3 - d = 105° - d \\ a_3 = 105° \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{La suma de los tres es } 180°: \\ 105° - 2d + 105° - d + 105° = 180° \rightarrow -3d = -135 \rightarrow d = 45° \end{array}$$

Por tanto:

$a_1 = 105° - 2d = 105° - 90° = 15°$
$a_2 = 105° - d = 105° - 45° = 60°$
$a_3 = 105°$

Los ángulos miden 15°, 60° y 105°, respectivamente.

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Una máquina costó inicialmente 10 480 €. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad, y así sucesivamente.

a) ¿Cuánto le costó la máquina al quinto propietario?
b) Si el total de propietarios ha sido 7, ¿cuál es la suma total pagada por esa máquina?

Solución:

Es una progresión geométrica con $a_1 = 10\,480$ y $r = \frac{1}{2}$.

a) $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 10\,480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10\,480 \cdot \frac{1}{16} = \frac{10\,480}{16} = 655$ euros

b) $a_7 = a_1 \cdot r^6 = 10\,480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 10\,480 \cdot \frac{1}{64} = \frac{10\,480}{64} = 163{,}75$ euros

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{163{,}75 \cdot \frac{1}{2} - 10\,480}{\frac{1}{2} - 1} = 20\,796{,}25 \text{ €}$$

Ejercicio nº 7.-

¿Qué puedes afirmar de una sucesión en la que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$?

Solución:

$\frac{a_2}{a_1} = r \quad \rightarrow \quad a_2 = a_1 r$

$\frac{a_3}{a_2} = r \quad \rightarrow \quad a_3 = a_2 r$

$\frac{a_4}{a_3} = r \quad \rightarrow \quad a_4 = a_3 r$

$\ldots \qquad \ldots$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \quad \rightarrow \quad a_n = a_{n-1} \cdot r$

Como cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por un mismo número, la sucesión dada es una progresión geométrica.

Ejercicio nº 8.-

Calcula a_1 y a_{13} en una progresión aritmética en la que conocemos $d = 6$ y $S_{13} = 572$.

Solución:

$a_{13} = a_1 + 12d = a_1 + 12 \cdot 6 = a_1 + 72$

$S_{13} = \frac{(a_1 + a_{13}) \cdot 13}{2} \rightarrow 572 = \frac{(a_1 + a_1 + 72) \cdot 13}{2} \rightarrow 1144 = (2a_1 + 72) \cdot 13 \rightarrow$

$\rightarrow 88 = 2a_1 + 72 \rightarrow 16 = 2a_1 \rightarrow a_1 = 8$

$a_{13} = a_1 + 72 = 8 + 72 = 80 \rightarrow a_{13} = 80$