BLOQUE: GEOMETRÍA (Pitágoras, Tales, Áreas y Volúmenes)

2 Las propiedades de los triángulos

Las principales **propiedades de los triángulos** son:

– La longitud de cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos lados.

– La suma de los ángulos interiores es siempre 180°.

199 Indica si con los siguientes segmentos se puede formar un triángulo.

Ejemplo $a = 24$ cm, $b = 34$ cm, $c = 44$ cm

Pueden formar triángulo, ya que $44 < 24 + 34$, es decir, el lado mayor es menor que la suma de los otros dos lados.

a) $a = 16$ cm, $b = 36$ cm, $c = 56$ cm

b) $a = 12$ cm, $b = 12$ cm, $c = 12$ cm

c) $a = 13$ cm, $b = 17$ cm, $c = 33$ cm

200 Calcula el valor del ángulo que falta.

Ejemplo *18°, 24° y ...* $180 - (18 + 24) = 180 - 42 = 138°$

a) 55°, 65° y ...

b) 75°, 80° y ...

c) 105°, 70° y ...

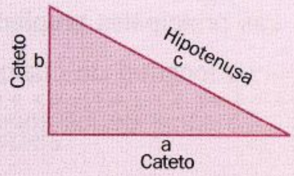
201 ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero?

202 El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 42°. ¿Cuánto miden cada uno de los otros ángulos?

3 El teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

$$a^2 + b^2 = c^2$$



203 Calcula la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos.

Ejemplo *Cateto* a = *12 cm, cateto* b = *16 cm:* $c^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Rightarrow c = \sqrt{400} = 20$ *cm*

a) Cateto a = 12 cm, cateto b = 35 cm

b) Cateto a = 20 dm, cateto b = 21 dm

c) Cateto a = 65 m, cateto b = 72 m

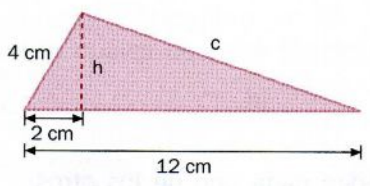
204 Calcula el cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos.

Ejemplo *Hipotenusa = 41 cm, cateto = 40 cm:* $c^2 = 41^2 - 40^2 = 481 - 400 = 81 \Rightarrow c = \sqrt{81} = 9$ *cm*

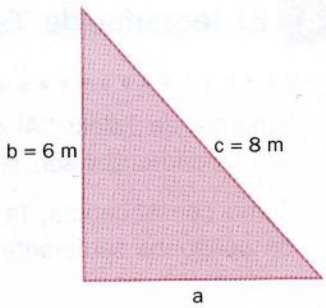
a) Hipotenusa = 13 cm, cateto = 12 cm

b) Hipotenusa = 73 m, cateto = 48 m

205 Calcula la altura (h) y el lado c del siguiente triángulo.



206 ***Un empleado de teléfonos está arreglando una centralita colocada en la fachada de un edificio a 6 metros de altura. Tiene una escalera de 8 metros de longitud. ¿A qué distancia del pie del edificio debe apoyar la escalera?***



En este problema hay que calcular un cateto. Despejando un cateto en el teorema de Pitágoras, este se puede poner como:

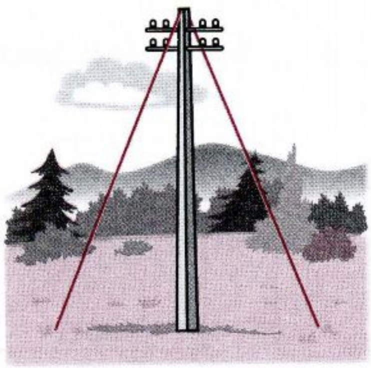
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow a = \sqrt{28} = \boxed{5{,}3 \text{ cm}}$$

207 Una escalera de 6 metros de longitud se quiere usar para subir a un tejado de 5 metros de altura. ¿Cuál es la distancia máxima a la que se puede colocar el pie de la escalera de la pared para poder subir al tejado?

208 Se quiere construir una rampa para subir un desnivel de 4 metros. Si la rampa solo puede medir 10 metros, ¿a qué distancia del desnivel hay que empezar a construirla?

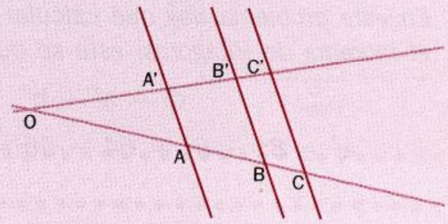
209 Un poste de la luz está sujeto desde su parte superior hasta el suelo por dos cables de acero, clavados, cada uno, a 3 metros del poste. Si dicho poste mide 8 metros, ¿qué cantidad de cable de acero ha hecho falta?



4 El teorema de Tales

Teorema de Tales: "Al cortar, por líneas paralelas, rectas concurrentes, los segmentos correspondientes son proporcionales".

Como consecuencia, la razón entre los lados homólogos de polígonos semejantes es un número constante.

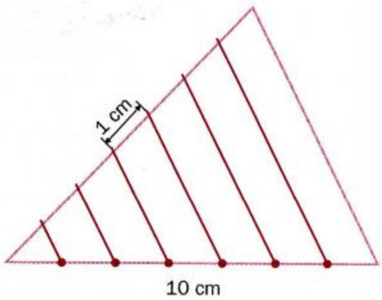


210 ***Divide un segmento de 10 centímetros de longitud en 7 partes iguales.***

Dibujamos el segmento y trazamos otro, de una medida arbitraria (por ejemplo, 7 centímetros), con extremo en uno de sus extremos. Este segundo segmento lo dividimos en 7 partes iguales.

La última parte la unimos mediante una recta con el otro extremo del segmento y luego trazamos paralelas a dicha recta por los puntos en que hemos dividido el segmento.

Los puntos de corte de las rectas con el segmento original nos dan las divisiones del segmento.



211 Divide un segmento de 14 centímetros en 3 partes iguales.

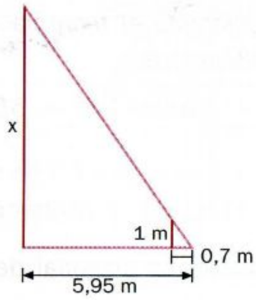
212 Dibuja un segmento de 10 centímetros y divídelo en dos partes de forma que una sea el doble de grande que la otra.

213 Los lados de un triángulo miden 18, 30 y 36 centímetros. Calcula cuánto miden los lados de un triángulo semejante a este cuyo lado menor mida 6 centímetros.

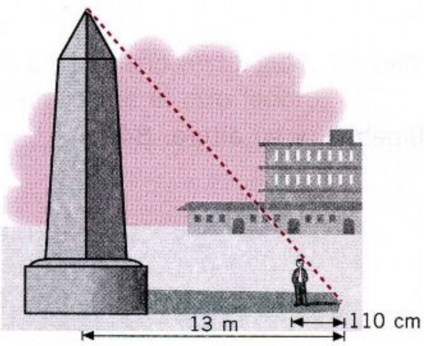
214 ***Sabiendo que un palo vertical de 1 metro de longitud proyecta una sombra de 70 centímetros, ¿qué altura tendrá un árbol cuya sombra mide 5,95 metros?***

Aplicando el teorema de Tales (se puede suponer que los rayos de luz del sol son paralelos) tenemos que:

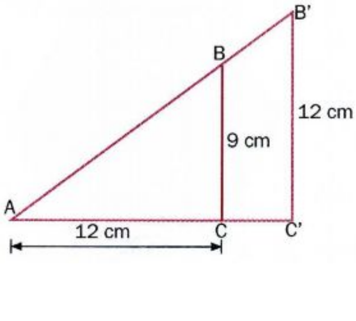
$$\frac{0,70}{5,95} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0,7 \cdot x = 1 \cdot 5,95 \Rightarrow x = \frac{5,95}{0,7} = \boxed{8,5\ m}$$



215 Calcula cuánto mide un obelisco proyecta una sombra de 13 metros cuando una persona de 1,75 metros proyecta una sombra de 110 centímetros.



216 Utilizando el teorema de Tales y el de Pitágoras, calcula la medida de los lados que faltan.

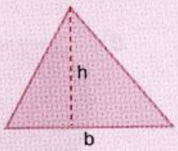


10. Áreas y volúmenes

1 Perímetros y áreas de figuras planas

- El **perímetro (p)** de un polígono es la suma de cada uno de sus lados. En el caso de la circunferencia, su perímetro es su longitud, $p = 2\pi r$.
- El **área** de una figura compuesta por varias se determina a partir del área de las figuras simples que la componen. A continuación se muestran las áreas de algunas figuras simples.

Triángulo



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

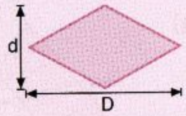
Cuadrado

$$A = l^2$$

Rectángulo

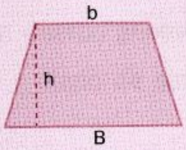
$$A = b \cdot h$$

Rombo



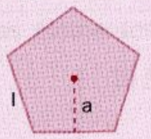
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Trapecio



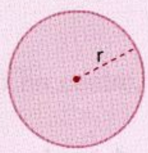
$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

Polígono regular



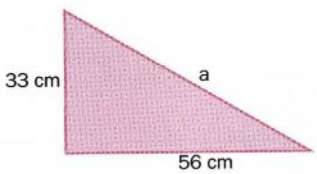
$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

Círculo



$$A = \pi \cdot r^2$$

271 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.



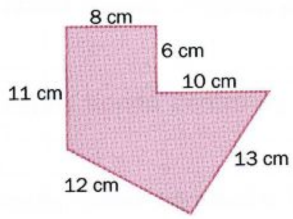
Ejemplo *Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el lado que falta.*

$a^2 = 33^2 + 56^2 = 4225$

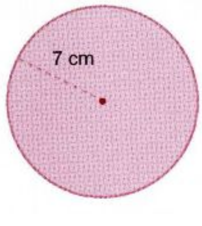
$a = \sqrt{4225} = 65$ cm

El perímetro es: P = 33 + 56 + 65 = 154 cm

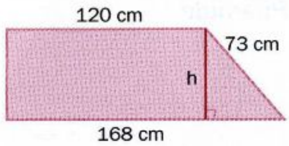
a)



b)



272 Calcula el área de las siguientes figuras.

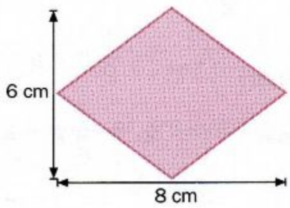


Ejemplo *Para calcular el área nos hace falta la altura,* h*, que se obtiene a partir del triángulo rectángulo que se forma. En él, la altura es un cateto, el otro cateto mide:* $x = 168 - 120 = 48$ *cm, y la hipotenusa mide 73 cm.*

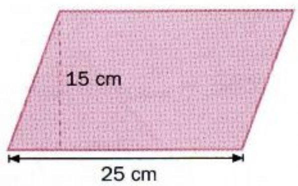
Aplicamos el teorema de Pitágoras: $73^2 - 48^2 = h^2$: $h = 55$ *cm*

Luego el área es: $A = \dfrac{120 + 168}{2} \cdot 55 = 7920$ *cm*^{2}

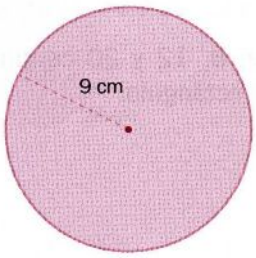
a)



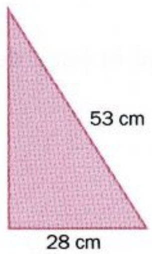
b)



c)

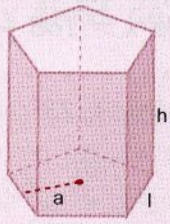


d)



2 Áreas de prismas y pirámides

Prisma



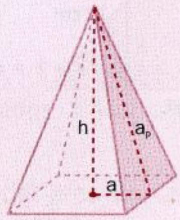
Área lateral: $A_{Lateral} = p \cdot h$

Área de las bases: (si la base es regular) $A_{Bases} = 2\,\dfrac{p \cdot a}{2} = p \cdot a$

$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Bases} = p \cdot h + p \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{Total} = p(h + a)$

Pirámide



Área lateral: $A_{Lateral} = \dfrac{1}{2} p \cdot a_p$

Área de la base: (si la base es regular) $A_{Base} = \dfrac{1}{2} p \cdot a$

$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = p \cdot a_p + \dfrac{1}{2} p \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{Total} = \dfrac{1}{2} p\,(a_p + a)$

273 ***Calcula el área total de una pirámide de base cuadrada de 12 centímetros de lado y 8 centímetros de altura.***

Calculamos la apotema de la pirámide. En el triángulo rectángulo marcado aplicamos el teorema de Pitágoras:

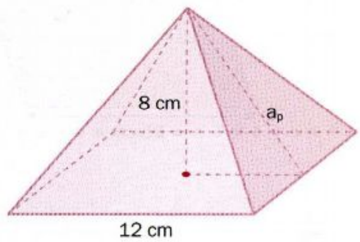
$a_p^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow a_p = \sqrt{100} = 10\ cm$

Como la base es un cuadrado, su perímetro es: $12 \cdot 4 = 48\ cm$

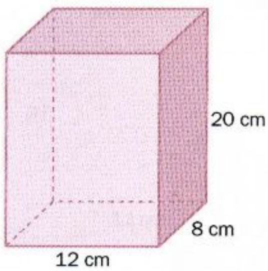
Por tanto: $A_{Lateral} = \dfrac{48 \cdot 10}{2} = 240\ cm^2$

Por otra parte, $A_{Base} = 12^2 = 144\ cm^2$

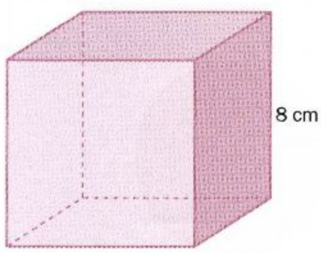
Luego el área total es: $A_{Total} = 240 + 144 = \boxed{384\ cm^2}$



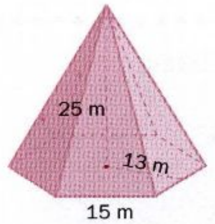
274 Calcula el área total de un prisma rectangular cuyas dimensiones miden 8, 12 y 20 centímetros. Ten en cuenta que la base del ortoedro no es un polígono regular, sino un rectángulo.



275 Calcula el área total de un cubo de 8 centímetros de arista. Ten en cuenta que la base del cubo es un cuadrado.



276 Calcula las áreas lateral y total de los siguientes cuerpos geométricos.



Calculamos el área de la base:

$$A_{Base} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} = 585 \ cm^2$$

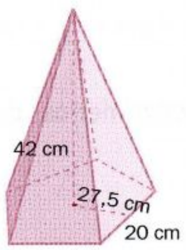
Para calcular el área lateral necesitamos la apotema lateral:

$$a_p = \sqrt{25^2 + 13^2} = 28{,}18 \ cm$$

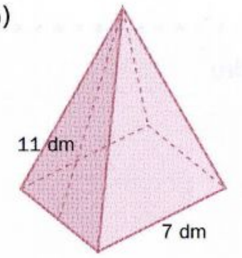
$$A_{Lateral} = \frac{p \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 28{,}18}{2} = 1\,268{,}1 \ cm^2$$

$$A_{Total} = A_{Base} + A_{Lateral} = 585 + 960{,}75 = 1\,853{,}1 \ cm^2$$

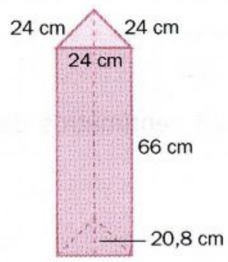
a)



b)

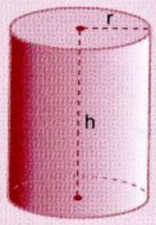


c)



3 Áreas de cuerpos de revolución

Cilindro

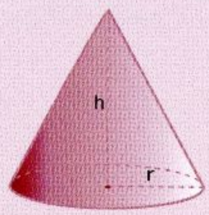


$A_{\text{Base}} = \pi \cdot r^2$

$A_{\text{Lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$A_{\text{Total}} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Cono

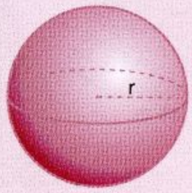


$A_{\text{Base}} = \pi \cdot r^2$

$A_{\text{Lateral}} = \pi \cdot r \cdot g$

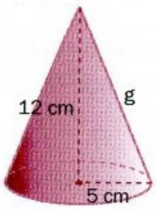
$A_{\text{Total}} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$

Esfera



$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

277 ***Calcula el área total de un cono de 12 centímetros de altura y cuya base tiene un diámetro de 10 centímetros.***



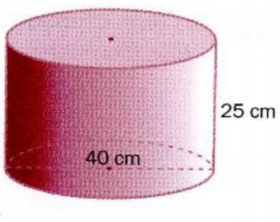
Calculamos primero la generatriz. Como tenemos un triángulo rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow g = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} A_{Lateral} = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}1 \text{ cm}^2 \\ A_{Base} = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{Total} = 204{,}1 + 78{,}5 = \boxed{282{,}6 \text{ cm}^2}$$

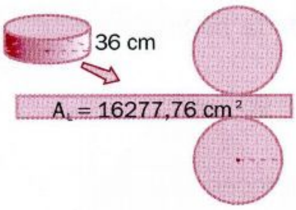
278 Un cilindro tiene 25 centímetros de altura. Si el diámetro de la base mide 40 centímetros, calcula su área total.



279 Calcula el área de una esfera de 24 centímetros de radio.

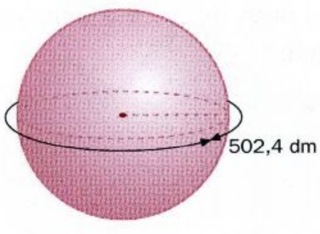
280 Un tipi indio tiene 5 metros de diámetro y 6 metros de altura. ¿Cuánta tela hará falta para construir uno?

281 Un cilindro tiene 36 centímetros de altura y su área lateral mide 16 277,76 centímetros cuadrados. ¿Cuál es la longitud del radio de la base?



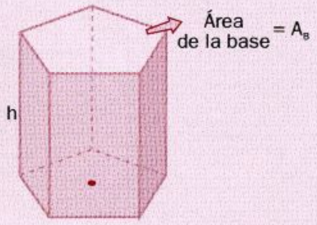
282 El radio de la base de una lata cilíndrica mide 8 centímetros, y su altura es la mitad que la longitud de la circunferencia de su base. ¿Cuánta hojalata hay que usar para fabricarla?

283 La longitud de la circunferencia máxima de una esfera mide 502,4 decímetros. Calcula el área de la esfera.



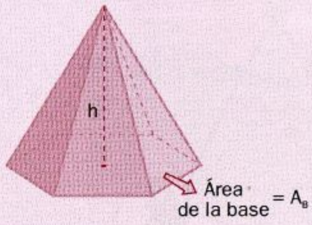
4 Volúmenes de prismas y pirámides

Prisma



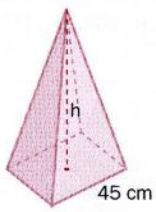
$$V_{\text{Prisma}} = A_B \cdot h$$

Pirámide



$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

284 ***Una pirámide de base cuadrada tiene de arista de la base 45 centímetros, y su altura es la mitad del perímetro de la base. Calcula su volumen.***



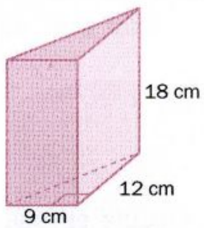
Calculamos el perímetro de la base, y luego, la altura de la pirámide:

$$p = 4 \cdot 45 = 180 \Rightarrow h = \frac{180}{2} = 90 \text{ cm}$$

El área de la base es: $A_B = l^2 = 45^2 = 2025 \text{ cm}^2$. *Entonces:*

$$V = \frac{2225 \cdot 90}{3} = \boxed{60\,750 \text{ cm}^3}$$

285 Calcula el volumen de un prisma triangular de 18 centímetros de altura y cuya base es un triángulo rectángulo de catetos 9 y 12 centímetros.

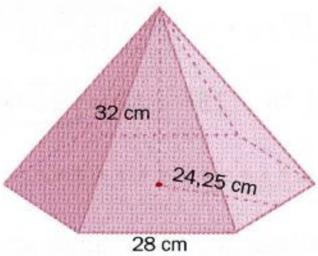


286 Un depósito de agua tiene forma de prisma rectangular con lados de la base de 25 y 20 metros. Calcula la altura para que pueda contener 1 000 metros cúbicos de agua.

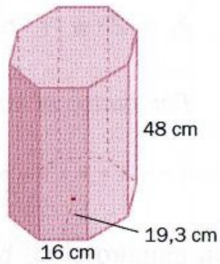
287 El área total de un cubo es de 150 centímetros cuadrados. Calcula su volumen.

288 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)



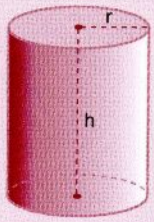
b)



289 La pirámide de Kefrén, en Egipto, tiene una base cuadrada de 214,5 metros de lado y una altura de 143,2. Calcula su volumen.

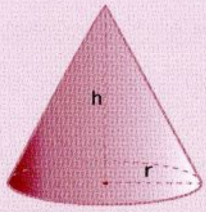
5 Volúmenes de cuerpos de revolución

Cilindro



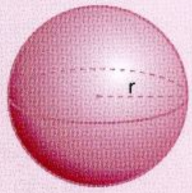
$$V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Cono



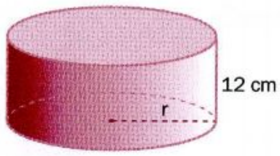
$$V_{\text{Cono}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Esfera



$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

290 ***El área lateral de un cilindro es de 1 130,4 centímetros cuadrados, y su altura mide 12 centímetros. Halla su volumen.***

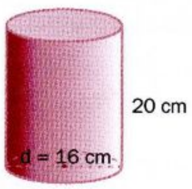


Primero calculamos el radio del cilindro a partir del área lateral:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Rightarrow 1\,130{,}4 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 12 \Rightarrow r = \frac{1\,130{,}4}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12} = 15 \text{ cm}$$

Por tanto, el volumen es: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 12 = \boxed{8478 \text{ cm}^2}$

291 Calcula el volumen de un cilindro si su base tiene 16 centímetros de diámetro y su altura es de 20 centímetros.

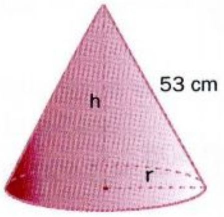


292 Un cilindro tiene por altura 100,48 centímetros, que coincide con la longitud de la circunferencia de la base. ¿Cuál es su volumen?

293 Calcula el volumen de un cono de 5 centímetros de radio y 12 de altura.

294 El depósito de un camión cisterna tiene forma cilíndrica de 6 metros de longitud y 1,5 metros de radio. ¿Cuántos metros cúbicos de leche puede transportar? Expresa el resultado también en litros.

295 Calcula el volumen de un cono de 56 centímetros de diámetro y 53 de generatriz.



296 Una esfera tiene 15 centímetros de radio. Calcula su volumen.

297 El área de una esfera es de 6 079,04 centímetros cuadrados. Calcula su volumen.

SOLUCIONES

199. a) No b) Sí c) No

200. a) 60° b) 25° c) 5°

201. 60°

202. 69°

203. a) 37 cm b) 29 dm c) 97 m

204. a) 5 cm b) 55 m

205. h = 3,46 cm; b = 10,58 cm

206. 5,3 m

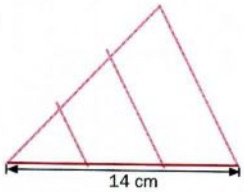
207. 3,32 m

208. 9,17 m

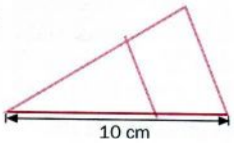
209. 17,08 m de cable

210. Ver dibujo en página 80

211.



212.



213. 10 y 12 cm

214. 8,5 cm

215. 20,7 m

216. AC = 15 cm; AB' = 16 cm; AC' = 20 cm

271. a) 60 cm b) 43,96 cm

272. a) 24 cm^2 c) 254,34 cm^2
b) 375 cm^2 d) 630 cm^2

273. 384 cm^2

274. 992 cm^2

275. 384 cm^2

276. a) A_L = 2 510 cm^2, A_T = 3 885 cm^2
b) A_L = 154 dm^2, A_T = 203 dm^2
c) A_L = 4 752 cm^2, A_T = 5 251,2 cm^2

277. 282,6 cm^2

278. 5 652 cm^2

279. 7 234,56 cm^2

280. 51,03 m^2

281. 72 cm

282. 1 663,95 cm^2

283. 80 384 dm^2

284. 60 750 cm^3

285. 972 cm^3

286. 2 m

287. 125 cm^3

288. a) 21 728 cm^3 b) 59 289,6 cm^3

289. 2 196 222,6 m^3

290. 8 478 cm^2

291. 4 019,2 cm^3

292. 80 769,8 cm^3

293. 314 cm^3

294. 42,39 m^3 = 42 390 L

295. 36 926,4 cm^3

296. 14 130 cm^3

297. 44 579,6 cm^3