1. Números racionales y reales

1 Fracciones equivalentes y números racionales

- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes**, es decir, representan el mismo valor, si se cumple que:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

- Para **obtener fracciones equivalentes** a otra fracción, se multiplican o dividen su numerador y su denominador por un mismo número.
- Todas las fracciones equivalentes entre sí determinan el mismo **número racional**. Para representarlo se usa la fracción irreducible.

1 ***Dadas las fracciones $\frac{18}{12}$ y $\frac{45}{36}$:***

a) Estudia si son equivalentes.

b) Halla tres fracciones equivalentes a $\frac{18}{12}$.

c) Escribe la fracción irreducible que represente al número racional $\frac{45}{36}$.

a) Son equivalentes si $18 \cdot 36$ da el mismo resultado que $12 \cdot 45$.

$$\left.\begin{array}{l} 18 \cdot 36 = 648 \\ 12 \cdot 45 = 540 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{No son equivalentes.}}$$

b) Para hallar tres fracciones equivalentes partimos de la fracción dada y multiplicamos o dividimos el denominador y el numerador por un mismo número.

– La multiplicamos por dos: $\frac{18}{12} = \frac{18 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \boxed{\frac{36}{24}}$

– La dividimos entre dos: $\frac{18}{12} = \frac{18 : 2}{12 : 2} = \boxed{\frac{9}{6}}$

– La dividimos entre seis: $\frac{18}{12} = \frac{18 : 6}{12 : 6} = \boxed{\frac{3}{2}}$

c) Simplificamos la fracción dada: $\frac{45}{36} = \frac{45 : 9}{36 : 9} = \frac{5}{4}$. *Por tanto, la fracción pedida es* $\boxed{\frac{5}{4}}$.

2 Determina cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a $\frac{8}{12}$, e identifica cuál de ellas es la fracción irreducible.

a) $\frac{4}{6}$

b) $\frac{16}{28}$

c) $\frac{24}{36}$

d) $\frac{32}{60}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{24}{30}$

3 Escribe cuatro fracciones equivalentes, una de ellas irreducible, del número racional $\frac{150}{60}$.

2 Suma y resta fracciones

- La **suma o resta** de dos fracciones con **igual denominador** es otra fracción con el mismo denominador y con numerador la suma o resta de los numeradores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

- Si las fracciones tienen **distinto denominador**, se reducen a común denominador y luego se suman o restan los numeradores.

4 ***Calcula las siguientes operaciones.***

a) $\frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{12}{9}$ ***b)*** $\frac{7}{6} - \frac{9}{12} + \frac{3}{8}$

a) Todas las fracciones tienen el mismo denominador; por tanto, mantenemos el denominador, y sumamos o restamos los numeradores:

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{12}{9} = \frac{4+3-12}{9} = \frac{-5}{9} = \boxed{-\frac{5}{9}}$$

b) Como las fracciones tienen distinto denominador, calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores, m.c.m.(6, 12, 8) = 24, lo dividimos entre cada denominador y multiplicamos el resultado por cada numerador. Finalmente operamos los numeradores.

$$\frac{7}{6} - \frac{9}{12} + \frac{3}{8} = \frac{7 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{28}{24} - \frac{18}{24} + \frac{9}{24} = \frac{28-18+9}{24} = \boxed{\frac{19}{24}}$$

5 Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones con el mismo denominador y simplifica el resultado cuando sea posible.

a) $\frac{2}{5} + \frac{12}{5} - \frac{9}{5} =$

b) $\frac{15}{7} - \frac{9}{7} - \frac{3}{7} =$

c) $\frac{4}{18} - \frac{6}{18} + \frac{10}{18} =$

d) $\frac{3}{20} - \frac{28}{20} + \frac{23}{20} =$

6 Calcula reduciendo previamente a denominador común y simplifica el resultado cuando sea posible.

a) $\frac{8}{6} + \frac{15}{24} + \frac{16}{9} =$

b) $\frac{16}{15} + \frac{12}{5} - \frac{24}{30} =$

c) $\frac{3}{18} - \frac{5}{9} - \frac{1}{2} =$

3 Multiplica y divide fracciones

- El **producto de dos o más fracciones** es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores, y por denominador, el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- El **cociente de dos fracciones** se obtiene multiplicando la primera por la inversa de la segunda. La fracción **inversa** de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

- Tanto en las multiplicaciones como en las divisiones se debe tener en cuenta la **regla de signos**.

7 ***Calcula las siguientes operaciones simplificando el resultado hasta obtener la fracción irreducible.***

a) $\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{4}{9}$

a) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{-3}{10}\right) \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot (-3) \cdot 4}{2 \cdot 10 \cdot 9} = -\frac{60}{180} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

Multiplicación de numeradores y denominadores

b) $\frac{-2}{15} : \frac{8}{5}$

b) $\frac{-2}{15} : \frac{8}{5} = \frac{-2}{15} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{10}{120} = \boxed{-\frac{1}{12}}$

Fracción inversa

8 Halla el resultado en forma de fracción irreducible de las siguientes multiplicaciones.

a) $\frac{-9}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{-2}{6} =$

b) $15 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \frac{9}{10} =$

c) $\frac{-3}{8} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{30}{4} =$

9 Calcula las siguientes divisiones, simplificando el resultado.

a) $4 : \frac{2}{5} =$

b) $\frac{-12}{30} : \left(-\frac{7}{3}\right) =$

c) $\frac{10}{3} : (-4) =$

4 Operaciones combinadas: jerarquía

- Cuando aparecen varias operaciones es necesario seguir un **orden** para efectuarlas:

  1.º Multiplicaciones y divisiones, siguiendo el orden de izquierda a derecha.

  2.º Sumas y restas.

- Si aparecen **paréntesis**, se operan primero estos empezando primero con los internos.

10 Calcula el resultado de las siguientes operaciones y simplifícalo cuando sea posible.

Ejemplo $\frac{9}{4} : \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} : \frac{1}{3} - 1 = \frac{18}{20} - \frac{21}{10} : \frac{1}{3} - 1 = \frac{18}{20} - \frac{63}{10} - 1 = \frac{18}{20} - \frac{126}{20} - \frac{20}{20} =$

$= -\frac{128}{20} = -\frac{32}{5}$

a) $\frac{1}{8} + \frac{5}{4} : \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{9} =$

b) $5 - 3 \cdot \frac{8}{10} : \frac{2}{3} + \frac{9}{12} =$

11 ***Realiza la siguiente operación y simplifica el resultado si es posible.***

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)\right)$$

Primero realizamos las operaciones de los paréntesis más internos; luego, las de los más externos, y una vez eliminados todos los paréntesis, operaremos primero la división y luego la resta.

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{6}\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(2 + \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left(\frac{48}{24} + \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \frac{49}{24} = \frac{3}{2} - \frac{24}{98} =$$

$$= \frac{147}{98} - \frac{24}{98} = \boxed{\frac{123}{98}}$$

12 Opera y simplifica.

a) $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} : \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}\right) =$

b) $\frac{2}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{5}{2} - \left(\frac{6}{4} + \frac{2}{9}\right)\right) =$

5 Problemas con fracciones

- Para resolver los problemas se deben seguir estos pasos:

  1.º **Leer** atentamente el enunciado.

  2.º **Identificar** lo que se pide en el problema.

  3.º Identificar los **datos** que se proporcionan.

  4.º **Relacionar** los datos, **obtener** la solución del problema e **interpretar** el resultado.

13 ***La quinta parte del agua de una garrafa de 10 litros se ha utilizado para regar las plantas, y con las $\frac{3}{4}$ partes del agua restante se ha limpiado el suelo de la casa. ¿Cuánta agua queda aún en la garrafa?***

Para regar las plantas se han utilizado: $\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{10}{5} = 2$ *litros de agua.*

Después quedan: $10 - 2 = 8$ *litros.*

Para limpiar el suelo se emplean: $\frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{24}{4} = 6$ *litros.*

Quedan: $8 - 6 =$ *2 litros de agua en la garrafa.*

14 Los $\frac{2}{3}$ de los 108 alumnos de 3.º de Educación Secundaria de un centro escolar elegirán la opción A de Matemáticas en 4.º De ellos, la sexta parte elegirá Educación Plástica. ¿Cuántos alumnos de los que optarán por la opción A prefieren una asignatura distinta a Educación Plástica?

15 Entre las cinco y las nueve de la tarde, Ana reparte el tiempo de la siguiente forma:

– La cuarta parte la dedica a hacer las tareas de clase.

– Los cuatro quintos del tiempo restante, a la clase de inglés y a natación.

– El resto, a preparar todo lo que necesita para el día siguiente y a ver la televisión.

¿Cuánto tiempo emplea Ana en ver la televisión y en preparar las cosas del día siguiente?

16 Pablo está enfermo, y sus amigos le han llamado para saber cómo se encuentra. La llamada ha durado 15 minutos. Con Iván habló las $\frac{3}{5}$ partes del tiempo; con Sara, la tercera parte del tiempo restante, y los últimos minutos habló con Javier. ¿Cuánto tiempo estuvo hablando con cada uno de sus amigos?

17 Tres amigos quieren comprar a Patricia un regalo por su cumpleaños. El primero pagó la mitad de lo que cuesta, y el segundo, la quinta parte. ¿Qué fracción del regalo pagó el tercero? Si el regalo costó 20 euros, ¿cuánto dinero puso cada uno?

18 ***Un cubo contiene 10 litros de agua, lo que representa los $\frac{5}{6}$ de su capacidad. ¿Cuánta agua cabe en el cubo cuando está lleno?***

Si x es el agua que cabe en el cubo cuando está lleno, $\frac{5}{6} \cdot x = 10$ *litros.*

Resolvemos la ecuación: $\frac{5}{6} \cdot x = 10 \Rightarrow x = 10 \cdot \frac{6}{5} = 12$. *En* $\boxed{\text{el cubo caben 12 litros.}}$

19 Seis hectáreas y media de un bosque representan $\frac{2}{5}$ de la superficie total de este. ¿Cuál es la superficie total del bosque?

Soluciones

1. a) No son equivalentes.

b) $\frac{36}{24}, \frac{9}{6}, \frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{4}$

2. a, c, e

3. $\frac{15}{6}, \frac{300}{120}, \frac{450}{180}, \frac{30}{12}$

4. a) $-\frac{5}{9}$ b) $\frac{19}{24}$

5. a) 1 b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $-\frac{1}{10}$

6. a) $\frac{269}{72}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $-\frac{8}{9}$

7. a) $-\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{12}$

8. a) $\frac{7}{4}$ b) -36 c) $-\frac{9}{8}$

9. a) 10 b) $\frac{6}{35}$ c) $-\frac{5}{6}$

10. a) $-\frac{17}{24}$ b) $\frac{129}{60}$

11. $\frac{123}{98}$

12. a) $\frac{49}{39}$ b) -1

13. 2 litros

14. 12 alumnos

15. 36 minutos

16. Iván: 9 min; Sara: 2 min; Javier: 4 min

17. 1.º: 10 €; 2.º: 4 €; 3.º: 6 €

18. 12 litros

19. 16,25 hectáreas