2. Potencias y raíces

1 Potencias de exponente entero

- Una potencia de **exponente natural** es el producto de un número por sí mismo tantas veces como indique el exponente:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ (n \text{ veces})$$

Si la base es negativa:
a^{par} = positivo
a^{impar} = negativo

- Una potencia de **exponente entero negativo** es la inversa de esa misma potencia con exponente positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

44 Calcula el valor de las siguientes potencias de exponente natural.

Ejemplo $(-6)^3 = (-6)\cdot(-6)\cdot(-6) = -216$

a) $(-7)^2 =$

b) $(-5)^3 =$

c) $-6^2 =$

d) $-(-9)^2 =$

45 ***Calcula las siguientes potencias.***

a) 3^{-4} ***b)*** $(-2)^{-5}$ ***c)*** $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3}$ ***d)*** $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}$

a) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \boxed{\frac{1}{81}}$

b) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = \boxed{-\frac{1}{32}}$

c) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^3} = \frac{1}{\frac{343}{512}} = \frac{512}{343} = \boxed{\left(\frac{8}{7}\right)^3}$

d) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{36}{25}}$

46 Halla el valor de las siguientes potencias.

a) $4^{-3} =$

b) $(-3)^{-5} =$

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} =$

d) $\left(-\frac{8}{5}\right)^{-1} =$

2 Propiedades de las potencias

- Las **propiedades de las potencias** son:
  - Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  - Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - Potencia de un producto: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
  - Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
  - Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- Como consecuencia de las propiedades de las potencias se concluye que:
  - Potencia de exponente cero: $a^0 = 1$
  - Potencia de exponente uno: $a^1 = a$

47 Aplica las propiedades necesarias para expresar como una única potencia las siguientes expresiones.

Ejemplo $\frac{7^{-5} \cdot 4^{-5}}{2^{-5}} = \frac{(7 \cdot 4)^{-5}}{2^{-5}} = \frac{28^{-5}}{2^{-5}} = \left(\frac{28}{2}\right)^{-5} = 14^{-5}$

a) $4^3 \cdot 5^3 =$

b) $\frac{12^{-2}}{6^{-2}} =$

c) $(7^2)^4 =$

48 Une con flechas los elementos de las columnas teniendo en cuenta las propiedades de las potencias que se aplican.

a) $\frac{12^5}{4^5}$	I. 28^3
b) $7^3 \cdot 4^3$	II. $\frac{20^{-4}}{4^{-4}}$
c) 5^{-4}	III. 3^5
d) $(7^2)^{-3} \cdot 7^6$	IV. 1

49 Reduce a una única potencia, teniendo en cuenta que las bases son iguales.

Ejemplo $(5^4)^2 \cdot (5^3)^{-4} = 5^8 \cdot 5^{-12} = 5^{-4}$

a) $\frac{2^9 \cdot 2^6}{2^2} =$

b) $\frac{4^{-5} \cdot 4^7}{4^{-2}} =$

c) $(-7^3)^{-4} \cdot (-7^2)^5 =$

50 ***Expresa como una única potencia considerando las propiedades de las potencias.***

a) $\dfrac{(3^2)^5}{3^9 \cdot 3^4}$

a) $\dfrac{(3^2)^5}{3^9 \cdot 3^4} = \dfrac{3^{2\cdot 5}}{3^{4+9}} = \dfrac{3^{10}}{3^{13}} = 3^{10-13} = \boxed{3^{-3}}$

b) $\dfrac{(-4)^7 \cdot (-5)^7}{2^7}$

b) $\dfrac{(-4)^7 \cdot (-5)^7}{2^7} = \dfrac{(4 \cdot 5)^7}{2^7} = \left(\dfrac{20}{2}\right)^7 = \boxed{10^7}$

51 Calcula el resultado de cada una de las potencias, aplicando las propiedades correspondientes.

Ejemplo $\dfrac{30^{-4}}{6^{-4}} = \left(\dfrac{30}{6}\right)^{-4} = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$

a) $\dfrac{12^3}{4^3} =$

b) $(-4)^{-3} \cdot (-4^3)^2 =$

c) $\dfrac{9^{-4} \cdot 9^2}{9^{-3}} =$

d) $(2^3)^4 \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-3} =$

52 Sustituye las letras *z* por los números que correspondan en cada caso.

Ejemplo $7^z \cdot 7^{-2} = 7^8 \Rightarrow 7^{z-2} = 7^8 \Rightarrow z - 2 = 8 \Rightarrow z = 10$

a) $(-3)^z = 1$

b) $(5 \cdot z)^2 = 5^2 \cdot 4^2$

c) $\dfrac{6^3}{6^z} = 6^4$

d) $\dfrac{9^4}{5^4} = \left(\dfrac{9}{5}\right)^z$

53 Comprueba si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades y explica por qué. En caso de ser falsas, escribe la igualdad correcta.

Ejemplo $4^5 \cdot 3^5 = 12^{10}$ *Es* ***falsa*** *porque, para multiplicar potencias con el mismo exponente, se multiplican las bases y se escribe el exponente. Lo correcto sería* $4^5 \cdot 3^5 = 12^5$.

a) $5^7 \cdot 5^7 \cdot 5^7 = (5^7)^3$

.....

.....

b) $\dfrac{8^{-1}}{8^{-3}} = 8^{-4}$

.....

.....

c) $6^5 \cdot 6^5 = 36^5$

.....

54 Explica por qué son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) El producto de dos potencias se realiza escribiendo la base y sumando los exponentes.

.....

.....

b) Para dividir dos potencias con igual exponente, se dividen las bases y se escribe el mismo exponente.

.....

.....

c) Para elevar una potencia a otra potencia, se escribe la base y se suman los exponentes.

.....

.....

55 Expresa como potencias de base 2 las siguientes expresiones.

Ejemplo $\frac{512 \cdot 2^{-3}}{4^6}$ *Las bases distintas de 2 son 512 y 4, que se pueden descomponer como:*

$512 = 2^9$ *y* $4 = 2^2$. *Sustituyendo en la expresión anterior y aplicando propiedades*

se obtiene: $\frac{512 \cdot 2^{-3}}{4^6} = \frac{2^9 \cdot 2^{-3}}{(2^2)^4} = \frac{2^6}{2^8} = \boxed{2^{-2}}$

a) $8 \cdot 2^{-2} =$

b) $(2^3)^{-2} \cdot 16 =$

c) $\frac{32}{2 \cdot 2^3} =$

56 Escribe matemáticamente las siguientes frases.

Ejemplo *El número cuyo cubo es* -36. $\Rightarrow \sqrt[3]{-36}$

a) El número cuyo cuadrado es 30.

b) El número que elevado a 5 da 19.

c) El número cuyo cubo es -15.

3 Raíz de un número real

- La **raíz cuadrada** de un número es otro número que elevado al cuadrado da el primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

- De forma general, la **raíz enésima** de un número es el número que elevado a n da el primero:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- Los términos de la raíz son el **índice**, n, y el **radicando**, a.

57 Teniendo en cuenta que $7^2 = 49$ y que $(-7)^2 = 49$, ¿es correcto decir que $\sqrt{49}$ tiene dos valores, 7 y -7? Razónalo.

58 ***Calcula las siguientes expresiones.***

a) $\sqrt[3]{216}$ ***b)*** $\sqrt[5]{243}$ ***c)*** $\sqrt[4]{-10\,000}$

a) $216 = 6^3$. *El número cuyo cubo es 256 es 6. Entonces,* $\boxed{\sqrt[3]{216} = 6}$.

b) $243 = (3)^5$. *El número que elevado a 5 da 243 es 3. Entonces,* $\boxed{\sqrt[5]{243} = 3}$.

c) $-1\,000$ *no se puede expresar como un número elevado a 4, puesto que cualquier número elevado a 4 da un resultado positivo. Se dice que* $\boxed{\sqrt[4]{-10\,000} \text{ no existe}}$.

59 Calcula las siguientes expresiones, dando todas las soluciones posibles.

Ejemplo *Hay que buscar el número que elevado a 4 da 81. Hay dos: 3 y −3. Entonces,* $\sqrt[4]{81} = 3$ *y* $\sqrt[4]{81} = -3$

a) $\sqrt{64} =$

b) $\sqrt[3]{-8} =$

c) $\sqrt[4]{16} =$

d) $\sqrt{100} =$

5 Potencias de exponente fraccionario

Una potencia de **exponente fraccionario** equivale a una raíz de índice el denominador y de radicando la base elevada al numerador:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

70 Escribe en forma de potencia las siguientes raíces.

Ejemplo $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}}$

a) $\sqrt[5]{4^3} =$

b) $\sqrt{7} =$

c) $\sqrt[3]{6^2} =$

d) $\sqrt{5^3} =$

e) $\left(\sqrt[4]{6}\right)^3 =$

f) $\sqrt[5]{16} =$

g) $\sqrt[6]{82} =$

h) $\sqrt[5]{23} =$

71 Expresa como raíz las siguientes potencias.

Ejemplo $8^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{8^4}$

a) $3^{\frac{1}{2}} =$

b) $5^{\frac{3}{2}} =$

c) $8^{\frac{1}{3}} =$

d) $4^{\frac{2}{5}} =$

72 Calcula las siguientes raíces, expresándolas primero como potencias.

Ejemplo $\sqrt[5]{7^{10}} = 7^{\frac{10}{5}} = 7^2 = 49$

a) $\sqrt{3^8} =$

b) $\sqrt[6]{2^{12}} =$

c) $\sqrt[3]{4^9} =$

SOLUCIONES

44. a) 49 b) -125 c) -36 d) -81

45. a) $\frac{1}{81}$ b) $-\frac{1}{32}$ c) $\left(\frac{8}{7}\right)^3$ d) $\frac{36}{25}$

46. a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{-1}{243}$ c) $\frac{81}{25}$ d) $\frac{-5}{8}$

47. a) 20^3 b) 2^{-2} c) 7^8

48. a-III; b-I; c-II; d-IV

49. a) 2^{13} b) 4^4 c) $(-7)^{-2}$

50. a) 3^{-3} b) 10^7

51. a) 27 b) 64 c) 9 d) 1

52. a) 1 b) 4 c) -1 d) 4

53. a) V b) F, $\frac{8^{-1}}{8^{-3}} = 8^2$ c) V

54. a) F. Solo se puede hacer si las bases son iguales.
b) F. Es cierta cuando el exponente es cero.
c) V.
d) F. Los exponentes se multiplican.

55. a) 2 b) $\frac{1}{4}$ c) 2

56. a) $\sqrt{30}$ b) $\sqrt[5]{19}$ c) $\sqrt[3]{-15}$

57. Tanto 7^2 como $(-7)^2$ es igual a 49. Por tanto, la afirmación es correcta.

58. a) 6 b) 3 c) No existe.

59. a) 8 y -8
b) -2
c) 2 y -2
d) 10 y -10

70. a) $4^{\frac{3}{5}}$ c) $6^{\frac{2}{3}}$ e) $6^{\frac{3}{4}}$ g) $82^{\frac{1}{6}}$
b) $7^{\frac{1}{2}}$ d) $5^{\frac{3}{2}}$ f) $16^{\frac{1}{2}}$ h) $23^{\frac{1}{5}}$

71. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5^3}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[5]{4^2}$

72. a) 81 b) 4 c) 64