3. Sucesiones

1 Sucesiones numéricas

- Una **sucesión** es un conjunto infinito de números ordenados que siguen alguna regla.
- Cada uno de estos números se llama **término** y se representa por a_n, donde n es el lugar que ocupa dicho número en la sucesión.
- La fórmula que permite hallar cualquier término de una sucesión se denomina **término general**.

73 Escribe los tres términos siguientes de las sucesiones.

Ejemplo *−1, 3, −5, 7, −9... Los tres términos siguientes son: 11, −13, 15.*

a) 2, 6, 18, 54, 162...

b) −7, −3, 1, 5, 9...

74 Escribe los 6 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y todos los demás se obtienen sumando 25 al término anterior.

75 ¿Cuáles son los 8 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es −1 y los demás se obtienen multiplicando el anterior por 4?

76 Escribe el término que falta en las siguientes sucesiones.

Ejemplo $\frac{1}{3}, \frac{-2}{7}, \frac{4}{11}, \frac{-8}{15}, __, \frac{-32}{23}, \frac{64}{27}, \ldots$ *En el numerador, cada término se obtiene multiplicando el anterior por −2, y en el numerador, sumando 4 al anterior. El término que falta es* $\frac{16}{19}$.

a) 7, 12, 17, ..., 27, 32...

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ..., $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$

c) 1, 4, 9, 16, 25, ..., 49, 64...

77 ***El término general de una sucesión es $a_n = 4n^2 + 5n - 2$. Calcula los términos primero, tercero y décimo.***

Como n indica el lugar que ocupa cada término en la sucesión, para hallar el primero sustituimos n por 1; para el tercero, por 3, y para el décimo, por 10.

– *Primer término:* $a_1 = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 4 + 5 - 2 = \boxed{7}$

– *Tercer término:* $a_3 = 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = 36 + 15 - 2 = \boxed{49}$

– *Décimo término:* $a_{10} = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 2 = 400 + 50 - 2 = \boxed{448}$

78 Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones dadas por su término general.

Ejemplo $a_n = n^2 - 2n$. *Dando a n los valores desde 1 hasta 4 se obtiene:*

$a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ $a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$ $a_3 = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$ $a_4 = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

a) $a_n = 5n - 3$

b) $a_n = \dfrac{1}{4n}$

c) $a_n = (-2)^n$

79 Calcula el término que ocupa el lugar 40 en cada una de las siguientes sucesiones.

Ejemplo $a_n = (10 + n)^2 \Rightarrow a_{40} = (10 + 40)^2 = 50^2 = 2\,500$

a) $a_n = 6n - 20$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $a_n = \dfrac{1}{2n - 1}$

d) $a_n = (2n - 100)^2$

80 Dada la sucesión $\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{8}, \dfrac{3}{16}, \dfrac{4}{32}, \dfrac{5}{64}, \ldots$, elige su término general de entre los siguientes.

a) $a_n = \dfrac{n + 1}{2n}$ b) $a_n = \dfrac{n + 1}{2^n}$ c) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ d) $a_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$

2 Progresiones aritméticas

- Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al término anterior una cantidad fija, llamada **diferencia** (d).
- El **término general** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \qquad \text{donde } a_1 \text{ es el primer término de la sucesión.}$$

- La **suma de los *n* primeros términos** de una progresión aritmética viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

81 Indica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo, escribe su diferencia.

Ejemplo *−7, −11, −15, −19, −23... Sí, es una progresión aritmética porque se mantiene una diferencia constante entre sus términos: d = −4.*

a) 5, 10, 20, 40, 80...

b) 35, 25, 15, 5, −5...

82 Calcula el término general de las siguientes progesiones aritméticas.

Ejemplo *20, 13, 6, −1, −8* $\quad a_1 = 20,\ d = 20 - 13 = -7 \Rightarrow a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-7) = 27 - 7n$

a) 2, 5, 8, 11, 14...

b) 48, 42, 36, 30, 24...

c) −9, −7, −5, −3, −1...

83 Halla el término general y los 4 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas a partir de los datos dados.

Ejemplo $a_1 = 2;\ d = 3$. *Sustituimos los datos en la fórmula general:*
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1 \Rightarrow a_1 = 2;\quad a_2 = 5;\quad a_3 = 8;\quad a_4 = 11$

a) $a_1 = -11;\ d = 5$

b) $a_1 = 16;\ d = -4$

84 Escribe el valor del término indicado de las siguientes sucesiones aritméticas.

Ejemplo $a_1 = 5$, $d = 1$, a_{25} *Sustituimos los términos en la fórmula general:* $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{25} = 5 + (25 - 1) \cdot 1 = 29$

a) $a_1 = 7$, $d = -3$, a_{40}

b) $a_1 = -8$, $d = 10$, a_{75}

c) $a_1 = -11$, $d = -2$, a_{30}

85 Escribe el término general de una progresión aritmética tal que $a_4 = 9$ y $a_5 = 15$.

86 ***Halla la suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética donde*** $a_1 = 4$ ***y*** $d = 5$.

El término general de la progresión aritmética es: $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 5$.

Sustituimos en la fórmula general:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{4 + [4 + 49 \cdot 5]}{2} \cdot 50 = \boxed{5\,200}$$

87 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 5$, $d = 2$

b) $a_1 = 10$, $d = -3$

88 Halla la suma de los 50 primeros números pares.

3 Progresiones geométricas

- Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo, llamada **razón** (r). La razón de una progresión geométrica es el cociente entre dos términos consecutivos.
- El **término general** de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \cdot d$$ donde a_1 es el primer término de la progresión.

- La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

89 Indica si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, indica su razón.

Ejemplo *1, −2, 4, −8, 16... Sí, es una progresión geométrica porque se cumple que:*

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \ldots = r = -2$$

a) 4, 12, 36, 72...

b) 2, −2, 2, −2, 2...

c) 3, 6, 9, 12, 15...

90 Calcula la razón r y escribe los tres términos siguientes de las progresiones geométricas.

Ejemplo *1, 3, 9, 27, 81...* $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = r = 3$. *El siguiente término será el resultado de multiplicar 81 por 3, y así sucesivamente. Los términos siguientes son: 243, 729 y 2 187.*

a) 5, −5, 5, −5, 5...

b) 4, −8, 16, −32, 64...

c) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$

91 Halla el término general y los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas a partir de a_1 y r.

Ejemplo $a_1 = 2,\ r = 3$: $a_n = a_1 \cdot 1^{(n-1)} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 6,\ a_3 = 18,\ a_4 = 54$

a) $a_1 = 6, r = 2$

b) $a_1 = -1, r = 5$

c) $a_1 = 7, r = -2$

92 ***Halla el término general y la suma de los 10 primeros términos de la progresión donde $a_1 = -8$ y $r = -2$.***

El término general de la progresión es: $\boxed{a_n = -8 \cdot (-2)^{n-1}}$

La suma de los 10 primeros números vendrá dada por la expresión general: $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$

Y sustituyendo los datos:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot (-2) - a_1}{-2 - 1} = \frac{\left(-8 \cdot (-2)^{9-1}\right) \cdot (-2) - (-8)}{-3} = \frac{(-8) \cdot (-2)^8 \cdot (-2) - (-8)}{-3} =$$

$$= \frac{(-8) \cdot (-2)^9 - (-8)}{-3} = \boxed{-1\,368}$$

93 Calcula la suma de los 5 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, r = 4$

b) $a_1 = 2, r = -3$

94 Si el cuarto término de una progresión geométrica es 405 y su razón 3, calcula su primer término y el término general.

SOLUCIONES

73. a) 4,86, 1 458 y 4 374
b) 13, 17 y 21

74. 2, −3, −8, −13, −18, −23

75. −1, −4, −16, −64, −256, −1 024, −4 096, −16 384

76. a) 22 b) $\frac{5}{6}$ c) 36

77. $a_1 = 7$ $a_3 = 49$ $a_{10} = 448$

78. a) $a_1 = 2$ $a_2 = 7$ $a_3 = 12$ $a_4 = 17$
b) $a_1 = \frac{1}{4}$ $a_2 = \frac{1}{8}$ $a_3 = \frac{1}{12}$ $a_4 = \frac{1}{16}$

79. a) 220 b) 1 c) $\frac{1}{79}$ d) 400

80. d

81. a) No es una progresión aritmética.
b) Es una progresión aritmética. $d = -10$.

82. a) $a_n = 3n - 1$ c) $a_n = 2n + 11$
b) $a_n = -6n + 52$

83. a) $a_n = 5n - 16$;
$a_1 = -11$; $a_2 = -6$; $a_3 = -1$; $a_4 = 4$
b) $a_n = -4n + 20$
$a_1 = 16$; $a_2 = 12$; $a_3 = 8$; $a_4 = 4$

84. a) $a_{40} = -110$ b) $a_{75} = 732$ c) $a_{30} = -69$

85. $a_n = 6n - 15$

86. 5 200

87. a) 725 b) −650

88. 2 550

89. a) Sí, $r = 3$ c) No
b) Sí, $r = -1$ d) Sí, $r = 1$

90. a) $r = -1$; −5, 5, −5
b) $r = -2$; −128, 256, −512
c) $r = \frac{2}{3}; \frac{32}{243}, \frac{64}{729}, \frac{128}{2\,187}$

91. a) $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$; $a_1 = 6$, $a_2 = 12$, $a_3 = 24$, $a_4 = 48$
b) $a_n = (-1) \cdot 5^{n-1}$; $a_1 = -1$, $a_2 = 5$, $a_3 = -25$, $a_4 = 125$
c) $a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$; $a_1 = 7$, $a_2 = -14$, $a_3 = 28$, $a_4 = -56$

92. $a_n = -8 \cdot (-2)^{n-1}$; $S_{10} = -1\,368$

93. a) 1 023 b) −244

94. $a_n = 15 \cdot 3^{n-1}$; $a_1 = 15$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

3. Sucesiones

1 **Escribe los tres primeros términos de la sucesión $a_n = 2n^2 - 3n + 1$.**

2 **Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, y escribe su término general.**

a) 5, 10, 15, 20...

b) 5, 10, 20, 40...

3 **Determina el término general que define los números naturales (1, 2, 3, 4...) y calcula la suma de los 100 primeros. ¿Es una sucesión aritmética?**

4 **Si el octavo término de una progresión aritmética es 15 y su diferencia es 3, calcula el primer término de la sucesión y el término general.**

5 **Escribe el término general de una progresión geométrica tal que $a_1 = 2$ y $a_2 = 6$. Determina los 5 primeros términos de esta progresión.**