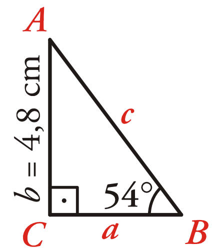
PENDIENTES MATEMÁTICAS I : PRIMERA PARTE (temas: 4, 5, 6, 7, 8)

TEMA 4.

Ejercicio nº 1.-

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.



Solución:

Como el triángulo es rectángulo, los ángulos son:

$$\hat{A} = 90^o - \hat{B} = 90^o - 54^o = 36^o$$
$$\hat{C} = 90^o$$

Hallamos los lados:

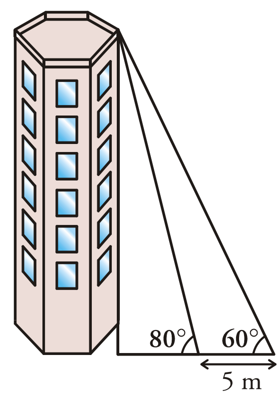
$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \;\rightarrow\; sen\,54^o = \frac{4,8}{c} \;\rightarrow\; c = \frac{4,8}{sen\,54^o} = 5,93 \text{ cm}$$
$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{a} \;\rightarrow\; tg\,54^o = \frac{4,8}{a} \;\rightarrow\; a = \frac{4,8}{tg\,54^o} = 3,49 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$a = 3,49 \text{ cm}; \; \hat{A} = 36^o$$
$$b = 4,8 \text{ cm}; \; \hat{B} = 54^o$$
$$c = 5,93 \text{ cm}; \; \hat{C} = 90^o$$

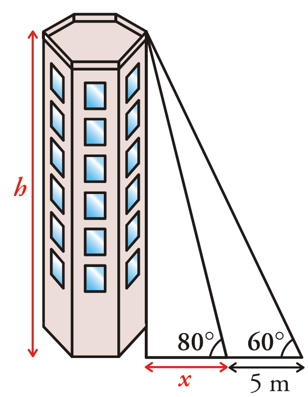
Ejercicio nº 2.-

Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre.



Solución:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,80^o = \dfrac{h}{x} \\ tg\,60^o = \dfrac{h}{x+5} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} h = x\,tg\,80^o \\ h = (x+5)\,tg\,60^o \end{array}\right\}$$



$$x\,tg\,80^o = (x+5)\,tg\,60^o$$
$$x\,tg\,80^o = x\,tg\,60^o + 5\,tg\,60^o$$
$$x\,tg\,80^o - x\,tg\,60^o = 5\,tg\,60^o$$
$$x\left(tg\,80^o - tg\,60^o\right) = 5\,tg\,60^o$$

$$x = \frac{5\,tg\,60^o}{tg\,80^o - tg\,60^o} = 2,20 \text{ m}$$

$$h = \frac{5\,tg\,60^o\,tg\,80^o}{tg\,80^o - tg\,60^o} = 12,47 \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 12,47 metros.

Ejercicio nº 3.-

Sabiendo que *sen* 50° = 0,77, *cos* 50° = 0,64 y *tg* 50° = 1,19, calcula (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $\boldsymbol{cos\,130^{\circ}}$ **b)** $\boldsymbol{tg\,310^{\circ}}$ **c)** $\boldsymbol{cos\,230^{\circ}}$ **d)** $\boldsymbol{sen\,310^{\circ}}$

Solución:

a) $cos130^{\circ} = cos\left(180^{\circ} - 150^{\circ}\right) = -cos50^{\circ} = -0,64$

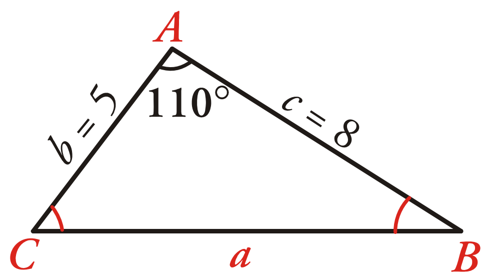
b) $tg310^{\circ} = tg\left(360^{\circ} - 50^{\circ}\right) = -tg50^{\circ} = -1,19$

c) $cos230^{\circ} = cos\left(180^{\circ} + 50^{\circ}\right) = -cos50^{\circ} = -0,64$

d) $sen310^{\circ} = sen\left(360^{\circ} - 50^{\circ}\right) = -sen50^{\circ} = -0,77$

Ejercicio nº 4.-

Calcula los lados y los ángulos del siguiente triángulo:



Solución:

Hallamos el lado a con el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot cos110^{\circ}$$
$$a^2 = 25 + 64 + 27,36$$
$$a^2 = 116,36$$
$$a = 10,79 \text{ cm}$$

Al conocer los tres lados, la solución es única.

Calculamos el ángulo $\hat{B}$, aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \rightarrow \frac{10,79}{sen110^{\circ}} = \frac{5}{sen\,\hat{B}} \rightarrow sen\,\hat{B} = \frac{5sen110^{\circ}}{10,79}$$

$$sen\,\hat{B} = 0,435 \rightarrow \hat{B} = 25^{\circ}\,48'\,49''$$
$$\hat{C} = 180^{\circ} - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) \rightarrow \hat{C} = 44^{\circ}\,11'\,11''$$

Por tanto:

$a = 10,79$ cm; $\hat{A} = 110^{\circ}$

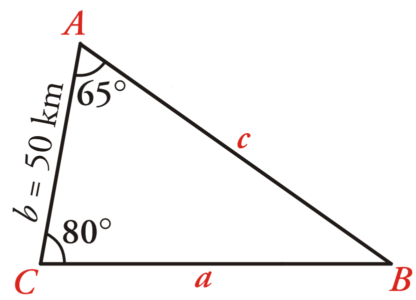
$b = 5$ cm; $\hat{B} = 25^{\circ}\,48'\,49''$

$c = 8$ cm; $\hat{C} = 44^{\circ}\,11'\,11''$

Ejercicio nº 5.-

En dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, *B*. Si consideramos el triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, el ángulo en *A* es de 65° y el ángulo en *C* es de 80°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Solución



Hallamos el ángulo $\hat{B}$:

$$\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 35^\circ$$

Hallamos los valores de a y c aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\,65^\circ} = \frac{50}{sen\,35^\circ} \quad \to \quad a = \frac{50\,sen\,65^\circ}{sen\,35^\circ} = 79 \text{ km}$$

$$\frac{c}{sen\,80^\circ} = \frac{50}{sen\,35^\circ} \quad \to \quad c = \frac{50\,sen\,80^\circ}{sen\,35^\circ} = 85{,}85 \text{ km}$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85,85 km de la estación A.

TEMA 5.

Ejercicio nº 1.-

Completa la tabla:

GRADOS	130º		330º	
RADIANES		4π / 3		1,5

Solución:

$$130^\circ = 130 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{13\pi}{18} \text{ rad}$$

$$\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$$

$$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

$$1{,}5 \text{ rad} = 1{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56' 37''$$

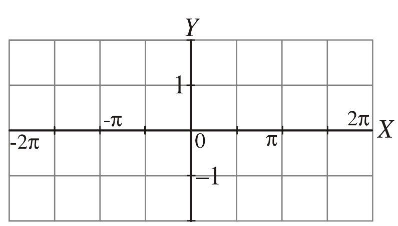
Por tanto:

GRADOS	**130º**	240º	**330º**	85º56'37"
RADIANES	13π / 18	**4π / 3**	11π / 6	**1,5**

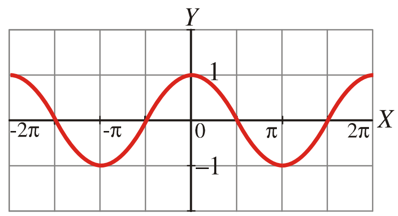
Ejercicio nº 2.-

a) **Representa en estos ejes la siguiente función trigonométrica:**

$$\boldsymbol{y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$



b) Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es la siguiente:

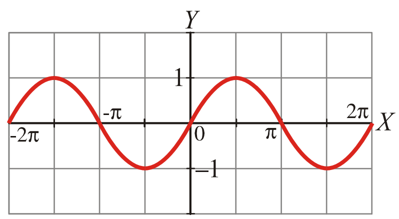


Solución:

a) Hacemos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x-\pi/2$	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos(x-\pi/2)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

La gráfica sería:



b) La gráfica corresponde a la función $y = \cos x$.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>
Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$$

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>
Resuelve la ecuación:

$$\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

Solución:

$$\cos 2x + sen^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - sen^2 x + sen^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \qquad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

TEMA 6.

Ejercicio nº 1.-

Calcula y representa gráficamente la solución que obtengas:

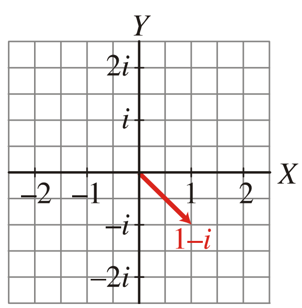
$$\frac{(3-i)i^3}{1-2i}$$

Solución:

$$\frac{(3-i)i^3}{1-2i} = \frac{(3-i)(-i)}{1-2i} = \frac{-3i+i^2}{1-2i} = \frac{-3i-1}{1-2i} = \frac{-1-3i}{1-2i} = \frac{(-1-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1-2i-3i-6i^2}{1-4i^2} = \frac{-1-2i-3i+6}{1+4} =$$

$$= \frac{5-5i}{5} = \frac{5}{5} - \frac{5i}{5} = 1-i$$

Representación gráfica:



Ejercicio nº 2.-

Dado el número complejo $z = \sqrt{3} - i$:

a) **Represéntalo gráficamente y exprésalo en forma polar.**

b) **Obtén su opuesto y su conjugado.**

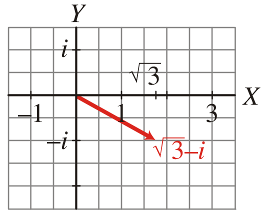
Solución:

a) Forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$tg\,\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 330^{\circ} \text{ (pues está en el 4.º cuadrante)}$$

Por tanto: $z = 2_{330^{\circ}}$



b) Opuesto $\rightarrow$ $-z = -\sqrt{3} + i$

Conjugado $\rightarrow$ $\bar{z} = \sqrt{3} + i$

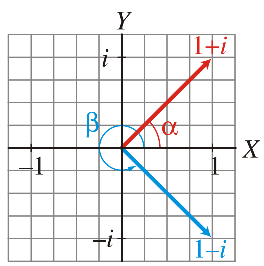
Ejercicio nº 3.-

Halla el módulo y el argumento de

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$$

Solución:

Expresamos $1-i$ y $1+i$ en forma polar:



$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$tg\,\beta = \frac{-1}{1} = -1 \quad \rightarrow \quad \beta = 315^{\circ} \text{ (pues está en el 4º cuadrante)}$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{1} = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^{\circ} \text{ (pues está en el } 1^{er} \text{ cuadrante)}$$

Por tanto:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}_{315^{\circ}}}{\sqrt{2}_{45^{\circ}}}\right)^4 = \left(1_{270^{\circ}}\right)^4 = 1_{1080^{\circ}} = 1_{0^{\circ}} = 1$$

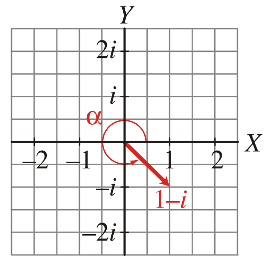
Módulo $= 1$ y *Argumento* $= 0°$.

Ejercicio nº 4.-

Representa gráficamente los resultados de hallar $\sqrt[3]{1-i}$. ¿Qué figura obtenemos al unir los afijos de las raíces obtenidas?

Solución:

Expresamos $1 - i$ en forma polar:



$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

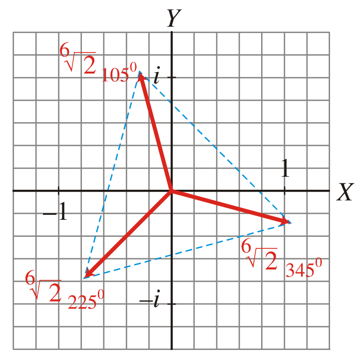
$$tg\,\alpha = \frac{-1}{1} = -1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 315^{\circ} \text{ (pues está en el 4.º cuadrante)}$$

Así:

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{315^{\circ}}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{315^{\circ}+360^{\circ}k}{3}} = \sqrt[6]{2}_{105^{\circ}+120^{\circ}k}\ ; \quad k = 0,1,2$$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{105^{\circ}}$; $\sqrt[6]{2}_{225^{\circ}}$; $\sqrt[6]{2}_{345^{\circ}}$

Representación gráfica:



Al unir los afijos de las tres raíces cúbicas obtenemos un triángulo equilátero.

Ejercicio nº 5.-

Obtén las tres soluciones de la ecuación:

$$z^3 + 8 = 0$$

Solución:

$z^3 + 8 = 0 \quad \rightarrow z^3 = -8$

$$z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^{\circ}}} = 2_{\frac{180^{\circ}+360^{\circ}k}{3}} = 2_{60^{\circ}+120^{\circ}k}\ ; \quad k = 0,1,2$$

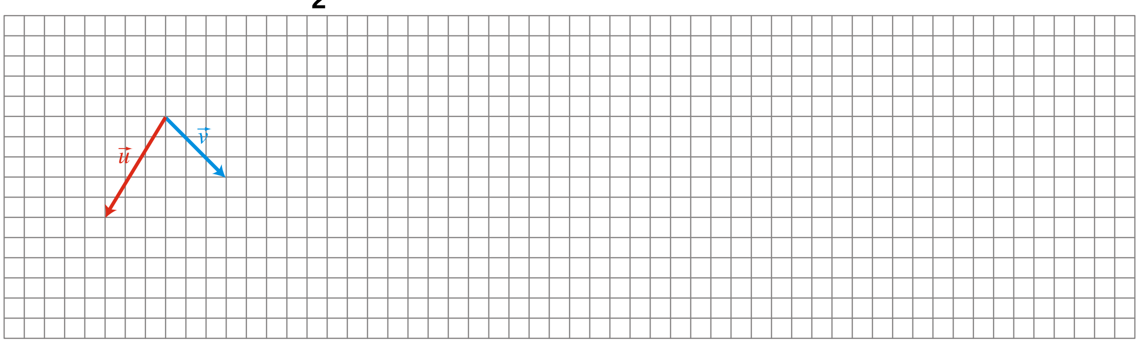
Las tres soluciones son: $2_{60^{\circ}}$; $2_{180^{\circ}}$; $2_{300^{\circ}}$

TEMA 7.

Ejercicio nº 1.-

a) A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u} + 2\vec{v}; \quad \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}; \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$

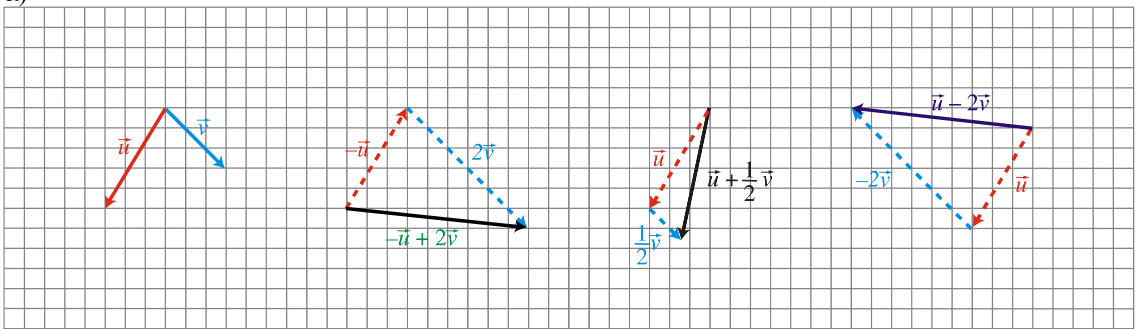


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)$ y $\vec{b}\,(2,\ -2)$, obtén las coordenadas de:

$$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b};\quad -2\vec{a}+\vec{b};\quad -4\vec{a}+\vec{b}$$

Solución:

a)



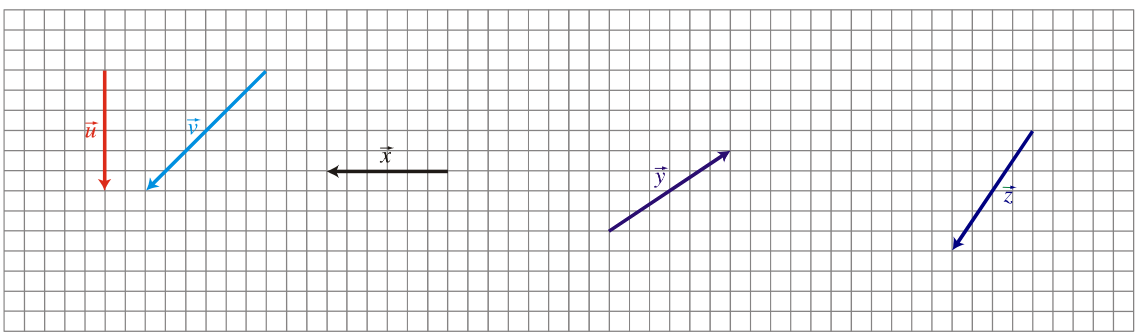
b) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)-\frac{1}{2}(2,\ -2)=\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)-(1,\ -1)=\left(\frac{-7}{4},\ 3\right)$

$-2\vec{a}+\vec{b}=-2\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)+(2,\ -2)=\left(\frac{3}{2},\ -4\right)+(2,\ -2)=\left(\frac{7}{2},\ -6\right)$

$-4\vec{a}+\vec{b}=-4\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)+(2,\ -2)=(3,\ -8)+(2,\ -2)=(5,\ -10)$

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

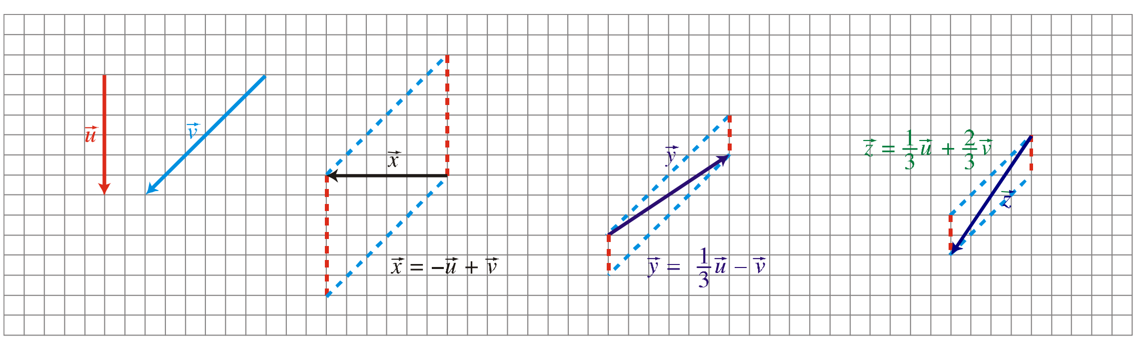
a) Escribe los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



b) Escribe el vector $\vec{a}\,(0,\ 17)$ com combinación lineal de $\vec{b}\left(\frac{1}{5},\ 3\right)$ y $\vec{c}\,(-1,\ 2)$.

Solución:

a)



b) Tenemos que encontrar dos números, m y n, tales que:

$\vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}$, es decir:

$$(0,\ 17) = m \cdot \left(\frac{1}{5},\ 3\right) + n \cdot (-1,\ 2)$$

$$(0,\ 17) = \left(\frac{m}{5},\ 3m\right) + (-n,\ 2n)$$

$$(0,\ 17) = \left(\frac{m}{5} - n,\ 3m + 2n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{m}{5} - n \\ 17 = 3m + 2n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 0 = m - 5n \\ 17 = 3m + 2n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 5n = m \\ 17 = 15n + 2n \quad \rightarrow \quad 17 = 17n \quad \rightarrow \quad n = 1 \end{array}$$

$$m = 5n = 5$$

Por tanto:

$\vec{a} = 5 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}$, es decir:

$$(0,\ 17) = 5\left(\frac{1}{5},\ 3\right) + (-1,\ 2)$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Dados $\vec{x}(5,\ -4)$, $\vec{y}(3,\ 2)$ y $\vec{z}(1,\ k)$:

a) Halla el valor de k para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ formen un ángulo 90°.

b) Halla un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{x}$.

Solución:

a) Para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ formen un ángulo de 90° (sean perpendiculares), su producto escalar ha de ser igual a cero:

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = (5,\ -4) \cdot (1,\ k) = 5 - 4k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{5}{4}$$

b) Hallamos el módulo de $\vec{x}$

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{x}$ será:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{41}}, \frac{-4}{\sqrt{41}}\right)$$

TEMA 8.

Ejercicio nº 1.-

a) Halla el punto medio del segmento de extremos *P*(3, –2) y *Q*(–1, 5).
b) Halla el simétrico del punto *P*(3, –2) con respecto a *Q*(–1, 5).

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \ \frac{-2+5}{2} \right) = \left(1, \ \frac{3}{2} \right)$$

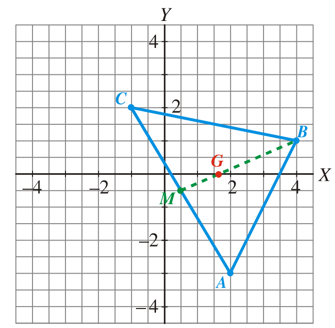
b) Llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a Q. Q es el punto medio del segmento que une P y P'. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad x = -5 \\ \dfrac{-2+y}{2} = 5 \quad \rightarrow \quad y = 12 \end{array}\right\} \quad P'(-5, 12)$$

Ejercicio nº 2.-

Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices *A*(2, –3), *B*(4, 1) y *C*(–1, 2).

***Solución*:**



Llamamos $G(x, y)$ al baricentro y $M(a, b)$ al punto medio del lado AC. Sabemos que:

$$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$$

Hallamos M:

$$M = \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-3+2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{GM} = \left(\dfrac{1}{2} - x, -\dfrac{1}{2} - y \right) \\ \overrightarrow{BG} = (x-4, y-1) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2\left(\dfrac{1}{2} - x, \ \dfrac{-1}{2} - y \right) = (x-4, \ y-1) \\ (1-2x, -1-2y) = (x-4, \ y-1) \end{array}$$

$$1 - 2x = x - 4 \quad \rightarrow \quad 5 = 3x \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

$$-1 - 2y = y - 1 \quad \rightarrow \quad 0 = 3y \quad \rightarrow \quad y = 0$$

El baricentro es:

$$G\left(\frac{5}{3}, 0 \right)$$

Ejercicio nº 3.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *A*(2, –3) y *B*(–1, 4).

Solución:

Vector posición: $\overline{OA}\ (2,-3)$

Vector dirección: $\overline{AB}\ (-3,7)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 7t \end{cases}$$

Ejercicio nº 4.-

Determina la posición relativa de las siguientes rectas. Si se cortan, averigua en qué punto:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - t \end{cases}}$$

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta *s*:

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = -4 - k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + t = 5 + 3k \\ 1 + 2t = -4 - k \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} t = 1 + 3k \\ 1 + 2(1 + 3k) = -4 - k \\ 1 + 2 + 6k = -4 - k \\ 7k = -7 \\ k = -1 \\ t = 1 + 3k = 1 - 3 = -2 \end{array}$$

Sustituimos $t = -2$ en las ecuaciones de *r* (o bien, $k = -1$ en las de *s*) para obtener el punto de corte de *r* y *s*:

$$\left.\begin{cases} x = 4 - 2 = 2 \\ y = 1 - 4 = -3 \end{cases}\right\} \rightarrow \ r \text{ y } s \text{ se cortan en el punto } (2,-3).$$

Ejercicio nº 5.-

Dadas las rectas *r* y *s*, determina el ángulo que forman:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + 4t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}}$$

Solución:

Vector dirección de *r* $\rightarrow$ (2, 4)

Vector dirección de *s* $\rightarrow$ (2, –1)

Llamamos α al ángulo que forman *r* y *s*:

$$\cos\alpha = \frac{|(2,\ 4)\cdot(2,\ -1)|}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{|4-4|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^{\circ}$$

Es decir, las rectas son perpendiculares.

Ejercicio nº 6.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $P(2, -2)$ y cuya pendiente es $m = -3$.

Solución:

Escribimos la ecuación punto–pendiente y operamos:

$$y = -2 - 3(x-2) \quad \rightarrow \quad y = -2 - 3x + 6 \quad \rightarrow \quad 3x + y - 4 = 0$$

Ejercicio nº 7.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a $2x + y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 1)$.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$2x + y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad pendiente = -2$$

La pendiente de la perpendicular es:

$$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta buscada será:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) \quad \rightarrow \quad 2y = 2 + x - 1 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 1 = 0$$

Ejercicio nº 8.-

Dados los puntos $P(3, 2)$ y $Q(-2, 4)$, y la recta r: $2x + y - 3 = 0$; calcula la distancia:

a) Entre P y Q.
b) De P a r.

Solución:

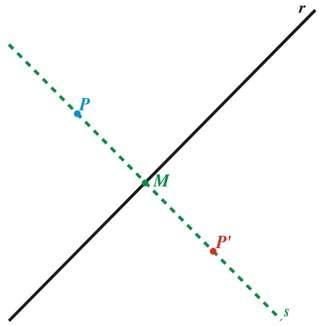
a) $dist\,(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|(-5,2)\right| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

b) $dist\,(P,r) = \dfrac{|2\cdot 3 + 2 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{|6+2-3|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

Ejercicio nº 9.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(3, -4)$ respecto a la recta $r: -3x + y + 2 = 0$.

Solución



1.º) Hallamos la ecuación de la recta, s, que es perpendicular a r y que pasa por P:

$$r: -3x + y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3x - 2 \quad \rightarrow \quad pendiente = 3$$

La pendiente de s será $\frac{-1}{3}$. Por tanto:

s: $y = -4 - \frac{1}{3}(x-3) \quad \to \quad 3y = -12 - x + 3$

s: $x + 3y + 9 = 0$

2.º) Hallamos el punto de corte, M, entre r y s:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + y + 2 = 0 \\ x + 3y + 9 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 3x - 2 \\ x + 3(3x-2) + 9 = 0 \end{array}$$

$$x + 9x - 6 + 9 = 0$$

$$10x = -3$$

$$x = \frac{-3}{10} \quad \to \quad y = \frac{-9}{10} - 2 = \frac{-29}{10}$$

El punto es $M\left(\frac{-3}{10}, \frac{-29}{10}\right)$.

3.º) Si llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a r, M es el punto medio entre P y P'. Por tanto:

$$\frac{3+x}{2} = \frac{-3}{10} \quad \to \quad 30 + 10x = -6 \quad \to \quad x = \frac{-36}{10} = \frac{-18}{5}$$

$$\frac{-4+y}{2} = \frac{-29}{10} \quad \to \quad -40 + 10y = -58 \quad \to \quad y = \frac{-18}{10} = \frac{-9}{5}$$

El punto buscado es $P'\left(\frac{-18}{5}, \frac{-9}{5}\right)$.