PENDIENTES MATEMÁTICAS I : SEGUNDA PARTE (temas: 10, 11, 12)

TEMA 10.

Ejercicio nº 1.-

Halla el dominio de definición de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

b) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

Solución:

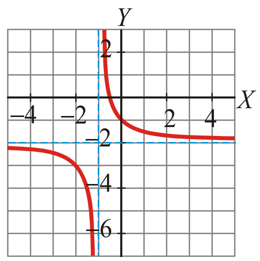
a) $x^2+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R} \;\rightarrow\;$ Dominio $= \mathbf{R}$

b) $x > 0 \;\rightarrow\;$ Dominio $= (0, +\infty)$

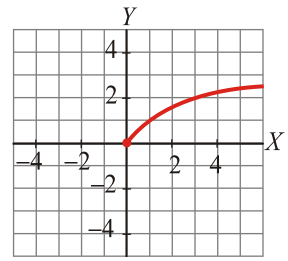
Ejercicio nº 2.-

A partir de la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición:

a)



b)



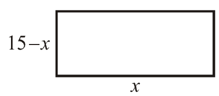
Solución:

a) Dominio $= \mathbf{R} - \{-1\}$

b) Dominio $= [0, +\infty)$

Ejercicio nº 3.-

Vamos a considerar todos los rectángulos de 30 cm de perímetro. Si llamamos x a la longitud de la base, el área será:



$$A = x(15 - x)$$

¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

Solución:

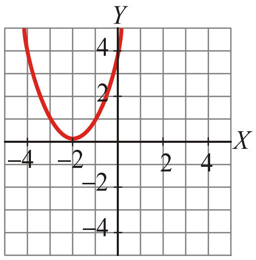
x puede tomar valores entre 0 y 15 cm. Por tanto, Dominio $= (0, 15)$.

Ejercicio nº 4.-

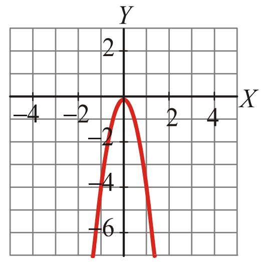
Asocia a cada gráfica su ecuación:

a) $y = -3x + 5$ **b)** $y = (x+2)^2$ **c)** $y = -\dfrac{5}{3}x$ **d)** $y = -4x^2$

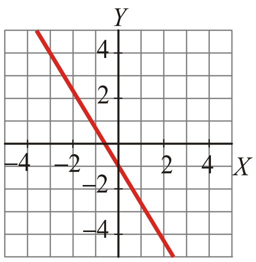
I)



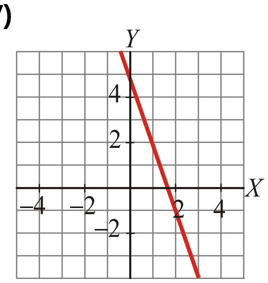
II)



III)



IV)



Solución:

a) IV b) I c) III d) II

Ejercicio nº 5.-

Asocia a cada una de estas gráficas su ecuación:

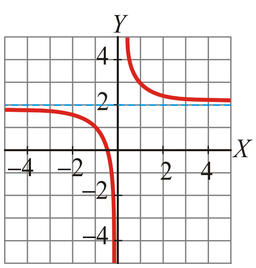
a) $y = \dfrac{1}{x-4}$

b) $y = \sqrt{2x}$

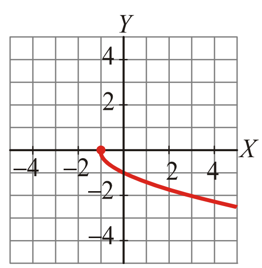
c) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

d) $y = -\sqrt{x+1}$

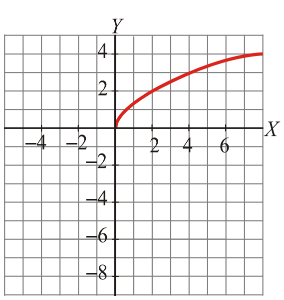
I)



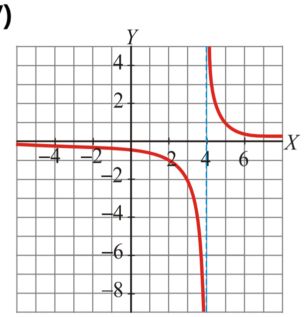
II)



III)



IV)



Solución:

a) IV b) III c) I d) II

Ejercicio nº 6.-

Asocia cada una de las siguientes gráficas con su ecuación:

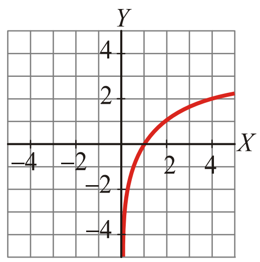
a) $y = 2^x$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

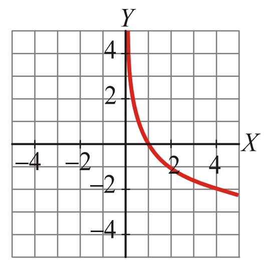
c) $y = \log_2 x$

d) $y = \log_{1/2} x$

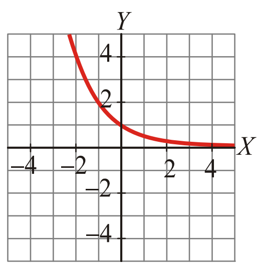
I)



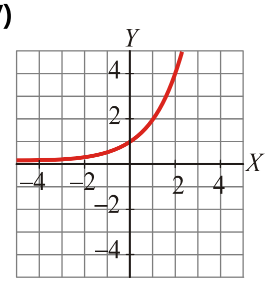
II)



III)



IV)



Solución:

a) IV b) III c) I d) II

Ejercicio nº 7.-

Obtén el valor de las siguientes expresiones en grados:

a) $y = arccos\,(-1)$

b) $y = arctg\left(\sqrt{3}\right)$

Solución:

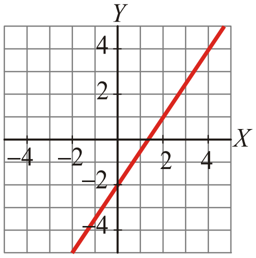
a) $y = 180^{\circ}$ b) $y = 60^{\circ}$

Ejercicio nº 8.-

Representa gráficamente:

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

Solución:



Ejercicio nº 9.-

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-1,\ 2)$ y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$.

Solución:

Escribimos la ecuación punto–pendiente:

$$y = -\frac{1}{3}(x+1)+2$$

Operando, llegamos a:

$$y = \frac{-1}{3}x - \frac{1}{3} + 2 = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Ejercicio nº 10.-

Obtén la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$$

Solución:

- Hallamos el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{1} = 2 \quad \rightarrow \quad y = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (2,\ -1)$$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{2} - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

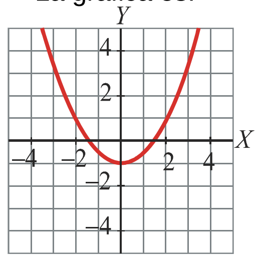
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \begin{cases} x = 3{,}41 & \rightarrow \quad \text{Punto } (3{,}41;\ 0) \\ x = 0{,}59 & \rightarrow \quad \text{Punto } (0{,}59;\ 0) \end{cases}$$

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 1)$$

- Hallamos algún otro punto:

x	–1	4	5
y	3,5	1	3,5

- La gráfica es:



Ejercicio nº 11.-

Representa gráficamente la siguiente función:

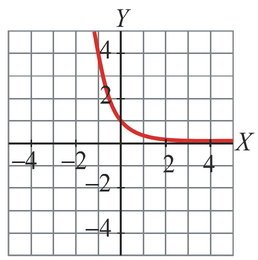
$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Solución:

Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	16	4	1	0,25	0,0625

La gráfica es:



Ejercicio nº 12.-

Representa la siguiente función:

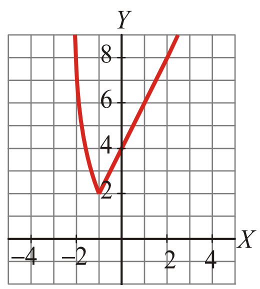
$$y = \begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Solución:

Si $x < -1$, tenemos un trozo de parábola.

Si $x \geq -1$, tenemos un trozo de recta.

La gráfica es:



Ejercicio nº 13.-

En un contrato de alquiler de una casa figura que el coste subirá un 2% cada año. Si el primer año se pagan 7200 euros (en 12 recibos mensuales):

a) ¿Cuánto se pagará dentro de 1 año? ¿Y dentro de 2 años?

b) Obtén la función que nos dé el coste anual al cabo de x años.

Solución:

a) Dentro de 1 año se pagarán $7200 \cdot 1{,}02 = 7344$ euros.

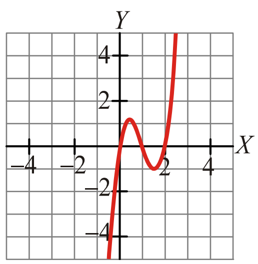
Dentro de 2 años se pagarán $7200 \cdot 1{,}02^2 = 7490{,}88$ euros.

b) Dentro de x años se pagarán:

$$y = 7200 \cdot 1{,}02^x \text{ euros.}$$

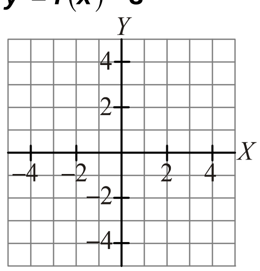
Ejercicio nº 14.-

La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$

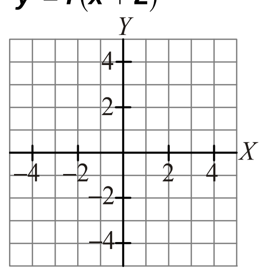


A partir de ella, representa:

a) $y = f(x) - 3$

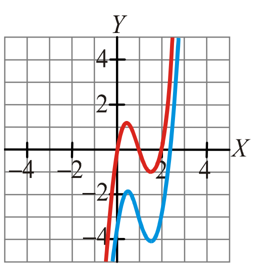


b) $y = f(x+2)$

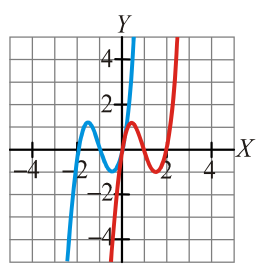


Solución:

a)



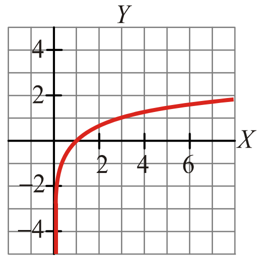
b)

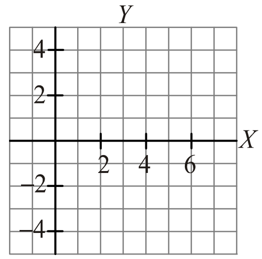


(La gráfica de *f(x)* no es necesario incluirla. La añadimos para que se aprecie más claramente la transformación).

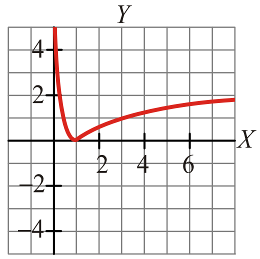
__Ejercicio nº 15.-__

Representa, a partir de la gráfica de $y = f(x)$, la función $y = |f(x)|$:





Solución:



__Ejercicio nº 16.-__

Define como función "a trozos":

$$y = |2x + 4|$$

Solución:

$$y = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ 2x + 4 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

__Ejercicio nº 17.-__

Sabiendo que $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = sen\, x$, halla :

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(g \circ g)(x)$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[x - x^2\right] = sen\left(x - x^2\right)$

b) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g[sen\, x] = sen(sen\, x)$

__Ejercicio nº 18.-__

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x + 1}$$

Explica como, a partir de ellas, se pueden obtener por composición estas otras:

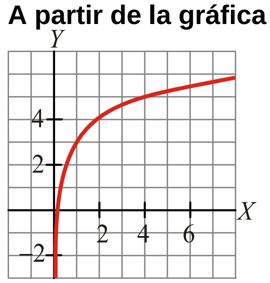
$$p(x) = \frac{x + 1}{2} \qquad\qquad q(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}$$

Solución:

$$p(x) = (f \circ g)(x) \qquad\qquad q(x) = (g \circ f)(x)$$

<u>Ejercicio nº 19.-</u>

A partir de la gráfica de *y = f (x)*:



a) Calcula $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$.

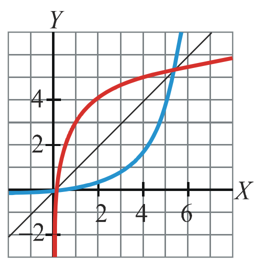
b) Representa, en los mismos ejes, $f^{-1}(x)$.

Solución:

a) $f^{-1}(3) = 1$ porque $f(1) = 3$

$f^{-1}(5) = 4$ porque $f(4) = 5$

b)



<u>Ejercicio nº 20.-</u>

Calcula la función inversa de:

$$f(x) = \frac{-2x - 1}{5}$$

Solución:

Cambiamos x por y, y despejamos la y:

$$x = \frac{-2y - 1}{5} \;\Rightarrow\; 5x = -2y - 1 \;\Rightarrow\; 2y = -5x - 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{-5x - 1}{2}$$

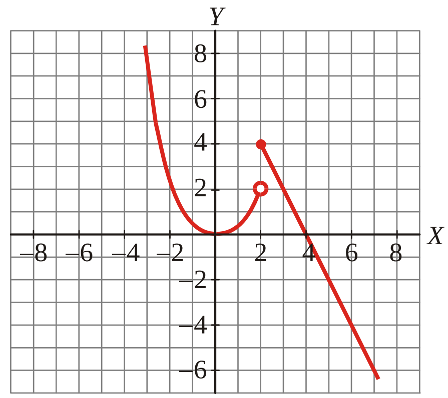
Por tanto:

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x - 1}{2}$$

TEMA 11.

Ejercicio nº 1.-

Dada la siguiente gráfica de *f(x),* calcula los límites que se indican:



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 2$ d) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 4$ e) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

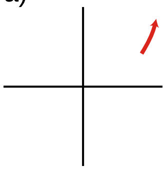
Ejercicio nº 2.-

Representa gráficamente los siguientes resultados:

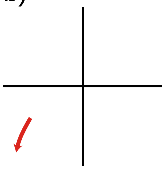
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Solución:

a)



b)



Ejercicio nº 3.-

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to-2} (3-x)^2$

b) $\lim\limits_{x\to-8} \left(1+\sqrt{-2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -2} (3-x)^2 = 5^2 = 25$

b) $\lim\limits_{x \to -8} \left(1+\sqrt{-2x}\right) = 1+\sqrt{16} = 1+4 = 5$

$c)$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} sen\, x = sen\ \dfrac{\pi}{2} = 1$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Calcula el límite de la siguiente función en el punto $x = 3$ y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha:

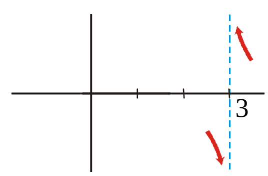
$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Solución:

$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$



<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Calcula y representa gráficamente la información obtenida

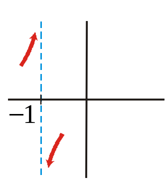
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + 1}$$

Solución:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x-4}{x+1}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-4}{x+1} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x-4}{x+1} = -\infty$$



Ejercicio nº 6.-

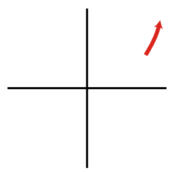
Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - x - x^4\right)$

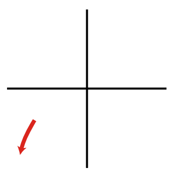
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - x - x^4\right) = -\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x\right) = -\infty$



Ejercicio nº 7.-

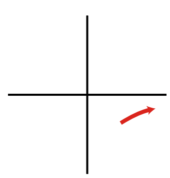
Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{(2 - x)^3}$

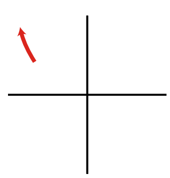
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{(2 - x)^3} = 0$

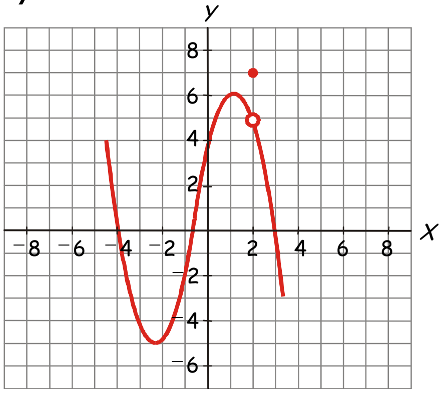


b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - x^3}{x^2 - 1} = +\infty$

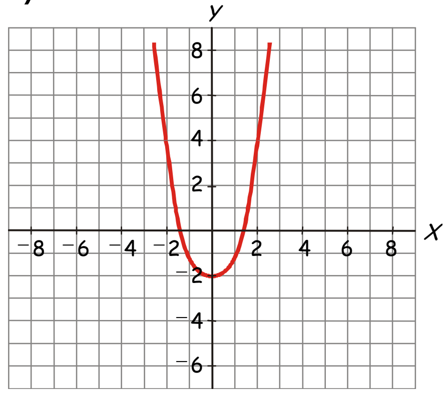


Ejercicio nº 8.-
¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$?

a)



b)



Si alguna de ellas no lo es, indica la razón de la discontinuidad.

Solución:

a) No es continua en $x = 2$; aunque esté definida en $x = 2$, tiene el punto desplazado. Es una discontinuidad evitable porque existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Sí es continua en $x = 2$.

Ejercicio nº 9.-
Halla el valor de *k* para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ k & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = k \\ f(1) = 3 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

Ha de ser $k = 3$.

Ejercicio nº 10.-
Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

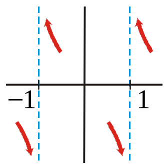
- $x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \; ; \quad x = 1.$

Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$.

- Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$



Ejercicio nº 11.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la función:

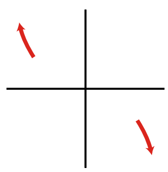
$$f(x) = \frac{-x^3+x}{2}$$

Representa gráficamente los resultados obtenidos.

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3+x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3+x}{2} = +\infty$$



Ejercicio nº 12.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la función:

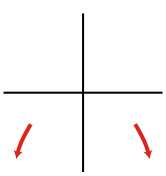
$$f(x) = \frac{2x^3+x}{1-x}$$

Representa la información obtenida.

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+x}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3+x}{1-x} = -\infty$$



Ejercicio nº 13.-

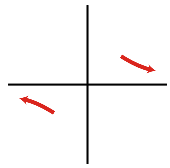
Estudia el comportamiento de la siguiente función, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas que obtengas:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x^2+2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{2x^2+2} = 0$$



Ejercicio nº 14.-

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x-2}$$

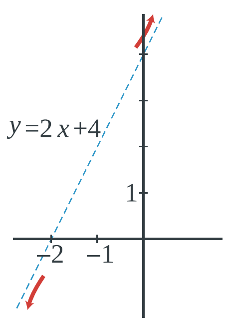
halla su asíntota oblicua y representa la posición de la curva respecto a ella.

Solución:

- $\frac{2x^2+1}{x-2} = 2x+4+\frac{9}{x-2} \quad \to \quad$ Asíntota oblicua: $y = 2x+4$

- Cuando $x \to +\infty$, $\frac{9}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.
- Cuando $x \to -\infty$, $\frac{9}{x-2} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Representación:



TEMA 12.

Ejercicio nº 1.-

Dada la función:

$$f(x)=(x-1)^3$$

Calcula la tasa de variación media en el intervalo [0, 1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

Solución:

$$\text{T.V.M. } [0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-(-1)}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en este intervalo.

Ejercicio nº 2.-

Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x)=\frac{2}{x}$.

Solución:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{1+h}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2(1+h)}{(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2-2h}{(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2h}{(1+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{(1+h)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{(1+h)}=\frac{-2}{1}=-2$$

Ejercicio nº 3.-

Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(x)$ para la función $f(x)=\frac{x+1}{3}$.

Solución:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1}{3}-\frac{(x+1)}{3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{3h}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio nº 4.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x^5+\frac{x}{3}$ **b)** $f(x)=sen\, x$

Solución:

a) $f'(x) = 10x^4 + \frac{1}{3}$

b) $f'(x) = \cos x$

Ejercicio nº 5.-

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}}$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+1}{e^x}}$

Solución:

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{3e^x - (3x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2} = \frac{2-3x}{e^x}$

Ejercicio nº 6.-

Halla la derivada de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(3x^4 - 2x\right)}$$

Solución:

$f'(x) = \frac{1}{3x^4 - 2x} \cdot \left(12x^3 - 2\right) = \frac{12x^3 - 2}{3x^4 - 2x}$

Ejercicio nº 7.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ que sea paralela a la recta $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 1}$.

Solución:

- $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- La pendiente de la recta es $y' = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$
- Cuando $x = 4$, $y = 2$
- La recta será:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = 2 + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{1}{4}x + 1$$

Ejercicio nº 8.-

Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

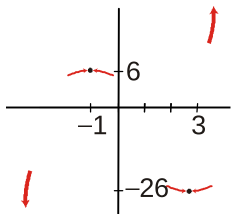
Solución:

- $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$

  $= \dfrac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \rightarrow & \text{Punto } (3,\ -26) \\ x = -1 \rightarrow & \text{Punto } (-1,\ 6) \end{cases}$

- Hallamos las ramas infinitas para saber si son máximos o mínimos:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 3x^2 - 9x + 1\right) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 3x^2 - 9x + 1\right) = -\infty$



Máximo en (–1, 6) y mínimo en (3, –26).

Ejercicio nº 9.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{2x - 3}{2}$
- Estudiamos el signo de la derivada:

  $\dfrac{2x-3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{2}$

  $\dfrac{2x-3}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 3 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{3}{2}$

  $\dfrac{2x-3}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 3 \quad \Rightarrow \quad x < \dfrac{3}{2}$

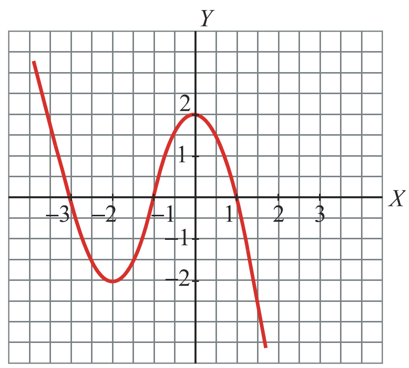
- La función decrece en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ $\left(\text{y tiene un mínimo en } x = \dfrac{3}{2}\right)$.

Ejercicio nº 10.-

Representa una función polinómica $f(x)$, de la que sabemos que :

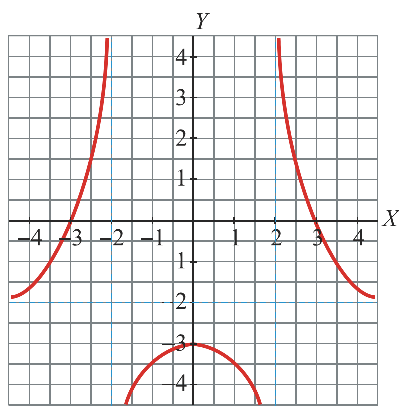
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es 0 en $(-2, -2)$ y en $(0, 2)$.**
- **Corta a los ejes en $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.**

Solución:



Ejercicio nº 11.-

La siguiente gráfica corresponde a la función *f (x)*:



a) ¿En qué puntos se anula la derivada?
b) ¿Cuáles son sus asíntotas?
c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f(0) = -3 \end{array}\right\}$ Hay un máximo en $(0, -3)$

b) Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
Asíntota horizontal: $y = -2$

c) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Ejercicio nº 12.-
Representa la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Solución:

- $\lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - 12x\right) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 12x\right) = -\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

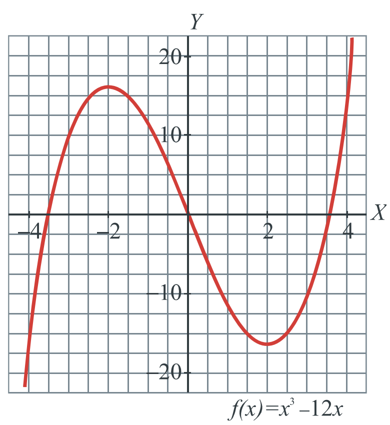
  Con el eje $X \;\rightarrow\; x^3 - 12x = x\left(x^2 - 12\right) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{12} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(-\sqrt{12},\, 0\right) \\ x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\, 0) \\ x = \sqrt{12} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(\sqrt{12},\, 0\right) \end{cases}$

  Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-2,\, 16) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2,\, -16) \end{cases}$

- Gráfica:



Ejercicio nº 13.-
Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3x}{x - 2}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{2\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \; y = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{3x}{x-2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\, 0)$

  Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\, 0)$

- Asíntota vertical: $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \quad ; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota horizontal: $y = 3$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x-2} = 3, \text{ con } y > 3$$

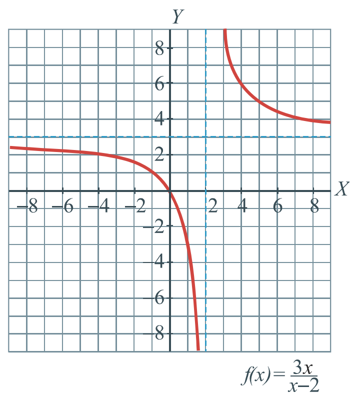
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{x-2} = 3, \text{ con } y < 3$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3(x-2)-3x}{(x-2)^2} = \frac{3x-6-3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



Ejercicio nº 14.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \to y = 0 \to \frac{x^3+2}{x} = 0 \to x^3 + 2 = 0 \to$$
$$\to x = \sqrt[3]{-2} \approx -1{,}3 \to \text{Punto } (-1{,}3;\, 0)$$

Con el eje $Y \to$ No corta el eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

- Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador)

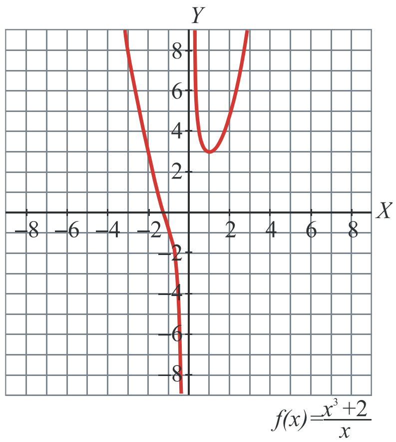
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 2)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (1, 3)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 15.-</u>
Dada la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \; y = 0 \; \rightarrow \; 2x^2 + 1 = 0 \; \rightarrow$ No corta al eje X.
  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x = 0$ no pertenece al dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

- Asíntota horizontal: $x = 2$
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$

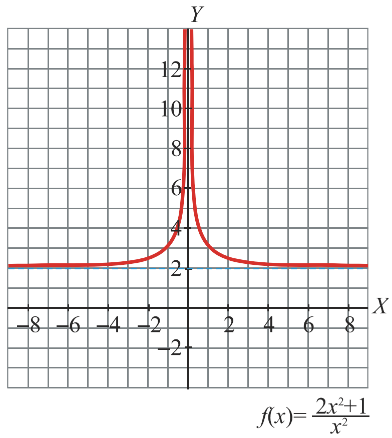
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x^2 - \left(2x^2+1\right) \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{4x^3 - 4x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



Ejercicio nº 16.-
Dada la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{x^3+4}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; x^3+4=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{-4} \approx -1{,}6 \;\rightarrow\;$ Punto $(-1{,}\ 6;\ 0)$

Con el eje $Y \rightarrow$ No corta el eje Y, pues $x=0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Asíntota oblicua:

$\frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; y = x$ es asíntota oblicua.

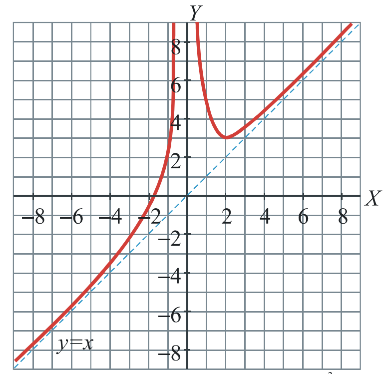
Si $x \to +\infty,\ \frac{4}{x^2} > 0 \;\Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $\frac{4}{x^2} > 0 \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x(x^3-8)}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \to \text{Punto } (2,\ 3)$$



$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$

Ejercicio nº 17.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}}$$

Solución:

- Dominio = **R**

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to y = 0 \to x^4 = 0 \to x = 0 \to$ Punto $(0,\ 0)$

Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto $(0,\ 0)$

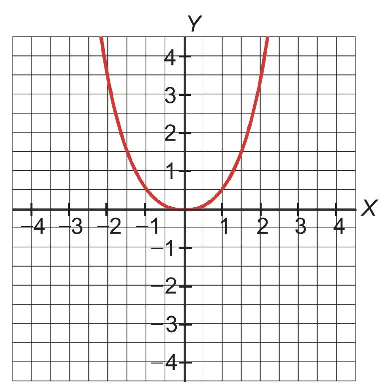
- Asíntotas verticales: No tiene.
  Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f(x) = \frac{4x^3(x^2+1) - x^4 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^5 + 4x^3 - 2x^5}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3(x^2+2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3(x^2+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \to \text{Punto } (0,\ 0)$$



$f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$