PENDIENTES MATEMÁTICAS CC.SS. I : PRIMERA PARTE (temas: 7,8,9,10)

TEMA 7: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD - RAMAS INFINITAS

Ejercicio nº 1.-Sobre la gráfica de *f(x)*, halla :

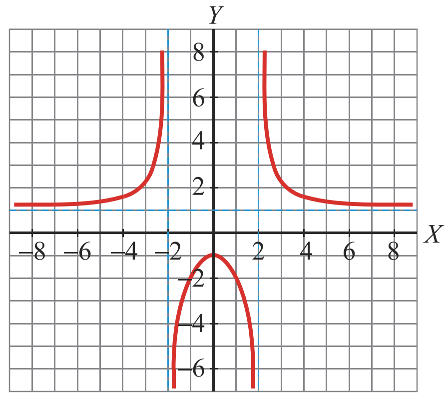
a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)$



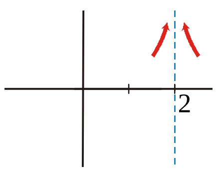
Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ d) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ e) $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

Ejercicio nº 2.- Representa los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$$

Solución:



Ejercicio nº 3.-

Calcula el límite de la función $f(x)=-\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x}{2}$ en $x=1$ y en $x=3$.

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x^4}{3}+\frac{x}{2}\right)=\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(-\frac{x^4}{3}+\frac{x}{2}\right)=-27+\frac{3}{2}=-\frac{51}{2}$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x=3$:

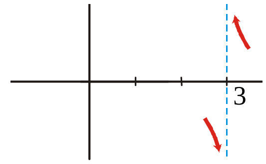
$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$$

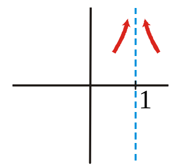


Ejercicio nº 5.- **Halla el límite siguiente y representa la información obtenida:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^3-3x^2+3x-1}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+5)}{(x-1)^2} = +\infty$$



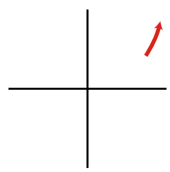
Ejercicio nº 6.- **Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:**

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(2-x-x^4\right)$

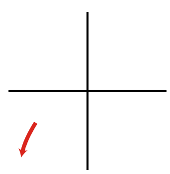
b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)$

Solución:

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(2-x-x^4\right) = -\infty$



b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right) = -\infty$



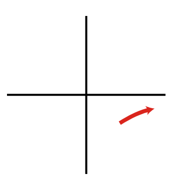
Ejercicio nº 7.- **Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:**

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+1}{(2-x)^3}$

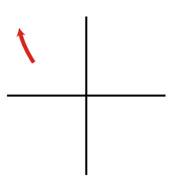
b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2-x^3}{x^2-1}$

Solución:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+1}{(2-x)^3} = 0$

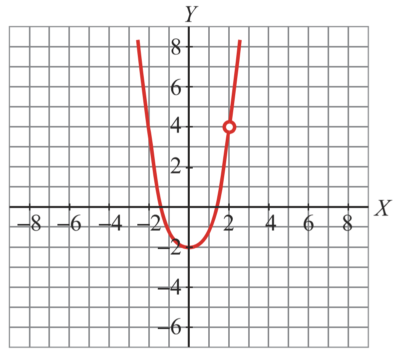


b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2-x^3}{x^2-1} = +\infty$



Ejercicio nº 8.-

Dada la gráfica de $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = 1$?

b) ¿Y en $x = 2$?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica cuál es la razón de la discontinuidad.

Solución:

a) Sí es continua en $x = -1$.

b) No, en $x = 2$ es discontinua porque no está definida en ese punto. Como sí tiene límite en ese punto, es una discontinuidad evitable.

Ejercicio nº 9.- **Averigua si la siguiente función es continua en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } \quad x \le 2 \\ x + 2 & \text{si } \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 2) = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\} \text{ Es continua en } x = 2 \quad \text{porque } \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2).$$

Ejercicio nº 10.- **Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:**

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

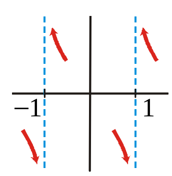
- $x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \;; \quad x = 1.$

  Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$.

- Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$



Ejercicio nº 11.-

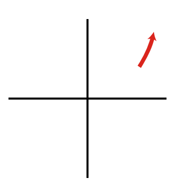
Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes funciones y representa la información que obtengas:

a) $f(x) = (x + 2)^4$

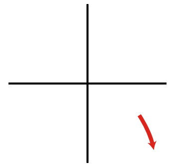
b) $f(x) = x - x^2$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2)^4 = +\infty$



b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)=-\infty$



***Ejercicio nº 12.-*Dada la función:**

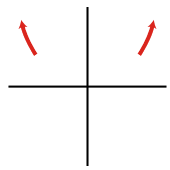
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3-1}{x+3}}$$

halla sus ramas infinitas, cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, y representa los resultados obtenidos.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x+3}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x+3}=+\infty$$



Ejercicio nº 13.-

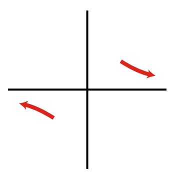
Estudia el comportamiento de la siguiente función, cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, y representa las ramas que obtengas:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+1}{2x^2+2}}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x^2+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x^2+2}=0$$



TEMA 8: INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

***Ejercicio nº 1.-*Consideramos la función:**

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-1}{2}}$$

Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si *f(x)* crece o decrece en ese intervalo.

Solución:

$$\text{T.V.M. }\left[0,\,2\right]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función crece en ese intervalo.

Ejercicio nº 2.-

Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(-1)$, siendo $f(x)=\dfrac{3x+1}{2}$.

Solución:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3(-1+h)+1}{2}-\dfrac{-2}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-3+3h+1}{2}+\dfrac{2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-3+3h+1+2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3h}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{2h}=\frac{3}{2}$$

Ejercicio nº 3.-

Halla la derivada de la función $f(x)=2x^2$, aplicando la definición de derivada.

Solución:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-2x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^2+h^2+2xh)-2x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2h^2+4xh-2x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+4xh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2h+4x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+4x)=4x$$

Ejercicio nº 4.-**Calcula la función derivada de:**

a) $f(x)=2x^3-x^2+1$

b) $f(x)=\ln x$

Solución:

a) $f'(x)=6x^2-2x$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Ejercicio nº 5.-**Calcula $f'(x)$ en cada caso:**

a) $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x+3}$ **b)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot \operatorname{sen} x$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{6x(2x+3)-3x^2\cdot 2}{(2x+3)^2}=\dfrac{12x^2+18x-6x^2}{(2x+3)^2}=\dfrac{6x^2+18x}{(2x+3)^2}$

b) $f'(x)=x^{1/3}\cdot \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} sen\, x + x^{1/3} \cdot cos\, x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, sen\, x + \sqrt[3]{x} \cdot cos\, x$$

Ejercicio nº 6.- **Halla la función derivada de:**

$$f(x) = \left(3x^2 + x\right)^4$$

Solución:

$$f'(x) = 4\left(3x^2 + x\right)^3 \cdot (6x + 1)$$

Ejercicio nº 7.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x$ que tenga pendiente -7.

Solución:

- $y' = 4x - 3$
- La pendiente de la recta es $y' = -7 \quad \Rightarrow \quad 4x - 3 = -7 \Rightarrow x = -1$
- Cuando $x = -1,\ y = 5$.
- La recta será:

$$y = 5 - 7(x + 1) = 5 - 7x - 7 = -7x - 2$$

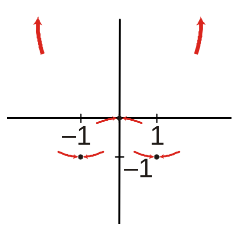
Ejercicio nº 8.- **Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función:**

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

Solución:

- $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \begin{cases} x = -1 & \rightarrow \text{Punto} \quad (-1, -1) \\ x = 0 & \rightarrow \text{Punto} \quad (0, 0) \\ x = 1 & \rightarrow \text{Punto} \quad (1, -1) \end{cases}$
- Hallamos las ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty$$



Mínimo en $(-1, -1)$ y en $(1, -1)$; máximo en $(0, 0)$

Ejercicio nº 9.- **Estudia dónde crece y dónde decrece la función:**

$$f(x) = 3 + 12x - 3x^2$$

Solución:

- $f'(x) = 12 - 6x$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$12 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$12 - 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad 12 > 6x \quad \Rightarrow \quad 6x < 12 \quad \Rightarrow \quad x < 2$$
$$12 - 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad 12 < 6x \quad \Rightarrow \quad 6x > 12 \quad \Rightarrow \quad x > 2$$

- La función es creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2 +\infty)$ (y tiene un máximo en $x = 2$).

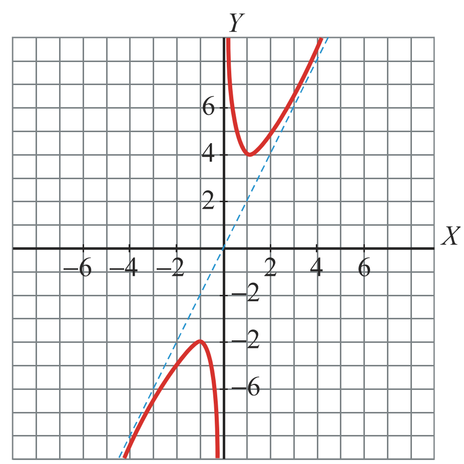
Ejercicio nº 10.

Representa gráficamente una función $f(x)$, de la que conocemos lo siguiente :

- **Su derivada se anula en $(-1, -4)$ y en $(1, 4)$.**
- **No corta a los ejes.**
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- **Tiene una asíntota oblicua, que es $y = 2x$. Además:**

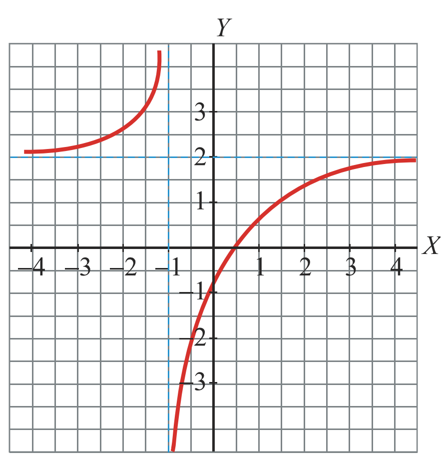
$$\begin{cases} \textbf{Si} \quad x \to -\infty, & \textbf{la curva está por debajo de la asíntota.} \\ \textbf{Si} \quad x \to +\infty, & \textbf{la curva está por encima de la asíntota.} \end{cases}$$

Solución:



Ejercicio nº 11.-

A partir de la gráfica de $f(x)$, di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



Solución:

- Asíntota vertical: $x = -1$

  Posición de la curva:
  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

- Asíntota horizontal: $y = 2$

  Posición de la curva:
  $$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, & y > 2 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, & y < 2 \end{cases}$$

- La función es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, +\infty)$.

<u>Ejercicio nº 12.-</u>**Estudia y representa la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^2}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

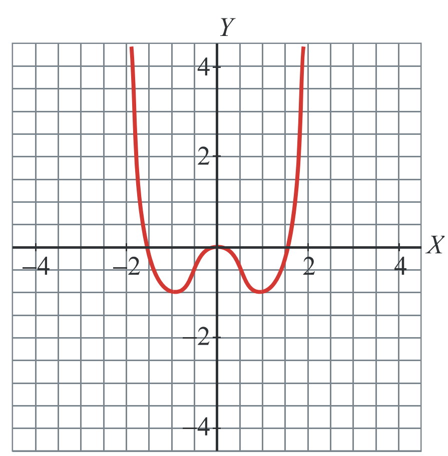
  Con el eje $X \to \quad x^4 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \to \text{Punto } (-\sqrt{2},\ 0) \\ x = 0 \to \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = -\sqrt{2} \to \text{Punto } (-\sqrt{2},\ 0) \end{cases}$

  Con el eje $Y \to x = 0 \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad$ Punto (0,0)

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \begin{cases} x = -1 \to \text{Punto } (-1, -1) \\ x = 0 \to \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 1 \to \text{Punto } (1, -1) \end{cases}$

- Gráfica:



$f(x) = x^4 - 2x^2$

Ejercicio nº 13.- **Estudia y representa la función:**

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$$

Solución:

- Dominio $=\mathbf{R}-\{-1,1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \text{Punto }(0,\,0)$$

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{x^2-1}=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Punto }(0,\,0)$$

- Asíntotas verticales: $x=-1$, $x=1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

Asíntota horizontal: $y=1$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=1, \;\text{ con }\; y>1$$

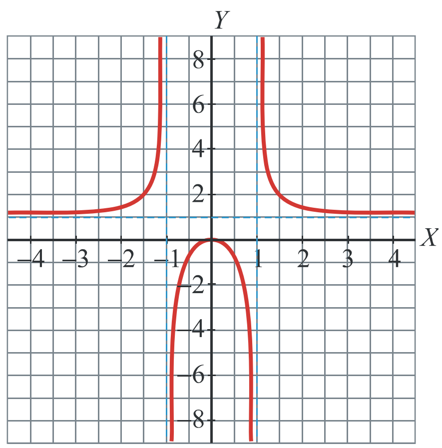
$$\lim_{x\to -\infty} f(\;)=1, \;\text{ con }\; y>1$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; -2x=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Punto }(0,\,0)$$

- Gráfica:



$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$

Ejercicio nº 14.- **Estudia y representa la siguiente función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^5}{x^2+1}}$$

Solución:

- Dominio = **R**

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\,0)$$
$$\text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\,0)$$

- Asíntotas verticales: No tiene.

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es tres unidades mayor que el del denominador).

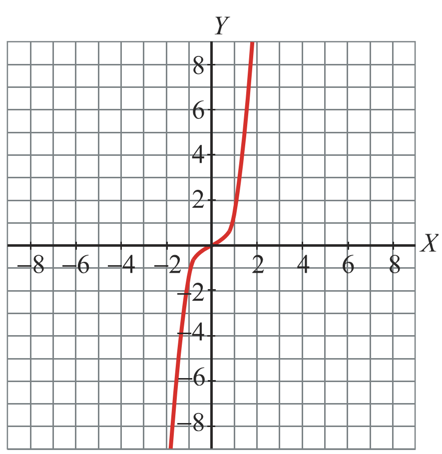
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{10x^4\left(x^2+1\right) - 2x^5 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{10x^6 + 10x^4 - 4^6}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{6x^6 + 10x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^4\left(3x^2+5\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^4\left(3x^2+5\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\,0)$$

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{2x^5}{x^2+1}$

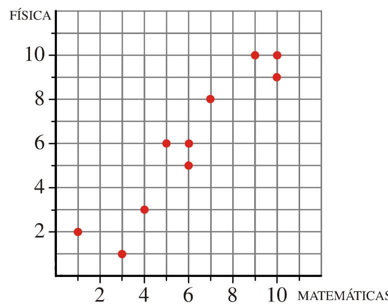
TEMA 9: DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES.

<u>Ejercicio nº 1.-</u>
Las notas de 10 alumnos y alumnas de una clase en Matemáticas y en Física han sido las siguientes:

Matemáticas	**7**	**6**	**4**	**5**	**9**	**10**	**3**	**1**	**10**	**6**
Física	**8**	**6**	**3**	**6**	**10**	**9**	**1**	**2**	**10**	**5**

Representa los datos mediante una nube de puntos y di cuál de estos valores te parece más apropiado para el coeficiente de correlación: 0,23; 0,94; –0,37; –0,94.

Solución:



Viendo la representación, observamos que el coeficiente de correlación es positivo y alto. Por tanto, r = 0,94.

<u>Ejercicio nº 2.-</u>
En un reconocimiento médico a los niños de un colegio, se les ha pesado, en kilogramos, y se les ha medido, en centímetros. Aquí tienes los datos de los primeros seis niños:

Estatura	**120**	**110**	**140**	**130**	**125**	**115**
Peso	**25**	**30**	**35**	**25**	**20**	**20**

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Cómo es la relación entre las dos variables?
Solución:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
120	25	14400	625	3000
110	30	12100	900	3300
140	35	19600	1225	4900
130	25	16900	625	3250
125	20	15625	400	2500
115	20	13225	400	2300
740	155	91850	4175	19250

- Medias:

$$\bar{x} = \frac{740}{6} = 123,33$$
$$\bar{y} = \frac{155}{6} = 25,83$$

- Desviaciones típicas:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{91850}{6} - 123,33^2} = \sqrt{98,04} = 9,90$$
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{4175}{6} - 25,83^2} = \sqrt{28,64} = 5,35$$

- Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{19250}{6} - 123,33 \cdot 25,83 = 22,72 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xy} = 22,72$$

- Coeficiente de correlación:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{22,72}{9,90 \cdot 5,35} = 0,43 \quad \rightarrow \quad r = 0,43$$

- La relación entre las variables es positiva, pero débil.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>
Se ha analizado en distintos modelos de impresoras cuál es el coste por página (en céntimos de euro) en blanco y negro y cuál es el coste por página si esta es en color. La siguiente tabla nos da los seis primeros pares de datos obtenidos:

X: **B Y N**	**8**	**11**	**17**	**21**	**14**	**10**
Y: **Color**	**33**	**49**	**95**	**106**	**58**	**53**

a) Halla la recta de regresión de *Y* sobre *X*.
b) ¿Cuánto nos costaría imprimir una página en color en una impresora en la que el coste por página en blanco y negro fuera de 12 céntimos de euro? ¿Es fiable la estimación? (Sabemos que $r = 0,97$).

Solución:
a)

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
8	33	64	264
11	49	121	539
17	95	289	1615
21	106	441	2226
14	58	196	812
10	53	100	530
81	394	1211	5986

- Medias:

$$\bar{x} = \frac{81}{6} = 13,5$$

$$\bar{y} = \frac{394}{6} = 65,67$$

- Varianza de X:

$$\sigma_x^2 = \frac{1211}{6} - 13,5^2 = 19,58$$

- Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{5986}{6} - 13,5 \cdot 65,67 = 111,12$$

- Coeficiente de regresión:

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{111,12}{19,58} = 5,68$$

- Ecuación de la recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 65,67 + 5,68(x - 13,5) \quad \rightarrow \quad y = 5,68x - 11,01$$

b) $\hat{y}(12) = 5,68 \cdot 12 - 11,01 \quad \rightarrow \quad \hat{y}(12) = 57,15$ céntimos de euro

Como la correlación es alta, $r = 0,97$, y $x = 12$ queda dentro del intervalo de valores que tenemos, la estimación sí es fiable. Si el coste de la página en blanco y negro es de 12 céntimos de euro, muy probablemente costará 57,15 céntimos de euro imprimirla en color.

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Un grupo de seis atletas ha realizado pruebas de salto de longitud y de altura. Las dos se han puntuado en una escala de 0 a 5. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

X: Longitud	**5**	**4**	**5**	**4**	**4**	**3**
Y: Altura	**4**	**4**	**5**	**3**	**4**	**3**

a) Halla las dos rectas de regresión y represéntalas.
b) Observando el grado de proximidad entre las dos rectas, ¿cómo crees que será la correlación entre las dos variables?

Solución:

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5	4	25	16	20
4	4	16	16	16
5	5	25	25	25
4	3	16	9	12
4	4	16	16	16
3	3	9	9	9
25	23	107	91	98

- Medias:

$$\bar{x} = \frac{25}{6} = 4{,}17$$

$$\bar{y} = \frac{23}{6} = 3{,}83$$

- Desviaciones típicas:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{107}{6} - 4{,}17^2} = \sqrt{0{,}44} = 0{,}67$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{91}{6} - 3{,}83^2} = \sqrt{0{,}498} = 0{,}71$$

- Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{98}{6} - 4{,}17 \cdot 3{,}83 = 0{,}36$$

- Coeficientes de regresión:

$$y \text{ sobre } x \rightarrow \quad m_{yx} = \frac{0{,}36}{0{,}44} = 0{,}82$$

$$x \text{ sobre } y \rightarrow \quad m_{xy} = \frac{0{,}36}{0{,}498} = 0{,}72$$

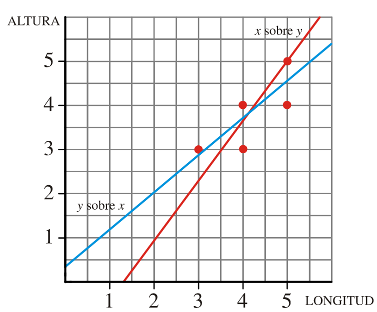
- Rectas de regresión:

$$y \text{ sobre } x \rightarrow \quad y = 3{,}83 + 0{,}82(x - 4{,}17) \rightarrow \quad y = 0{,}82x + 0{,}41$$

$$x \text{ sobre } y \rightarrow \quad x = 4{,}17 + 0{,}72(y - 3{,}83) \rightarrow \quad x = 0{,}72y + 1{,}41$$

$$y = \frac{x - 1{,}41}{0{,}72} \rightarrow \quad y = 1{,}39x - 1{,}96$$

- Representación:



b) La correlación entre las dos variables no es demasiado fuerte, pues las dos rectas no están muy próximas. Comprobamos que el coeficiente de correlación es: $r = \dfrac{0{,}36}{0{,}67 \cdot 0{,}71} = 0{,}76$

TEMA 10: DISTRIBUCIONES PROBABILIDAD. VARIABLE DISCRETA

Ejercicio nº 1.-

En una bolsa hay 3 bolas rojas, 5 blancas y 2 verdes. Hacemos tres extracciones con reemplazamiento y anotamos el número total de bolas verdes que hemos sacado.

a) Haz una tabla con las probabilidades.

b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

a) Los posibles valores de x_i son 0, 1, 2, 3. La tabla de la distribución de probabilidad es la siguiente:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

b) $\mu = \Sigma p_i x_i = 0,6 \quad \rightarrow \quad \mu = 0,6$

$$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0,84 - 0,36} = \sqrt{0,48} = 0,69 \quad \rightarrow \quad \sigma = 0,69$$

Ejercicio nº 2.-

Explica para cada una de estas situaciones si se trata de una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica los valores de *n* y *p*:

a) El 2% de las naranjas que se empaquetan en un cierto lugar están estropeadas. Se empaquetan en bolsas de 10 naranjas cada una. Nos preguntamos por el número de naranjas estropeadas de una bolsa elegida al azar.

b) En una urna hay 2 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la experiencia 10 veces y estamos interesados en saber el número de bolas blancas que hemos extraído.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n = 10, \ p = 0,02 \ \rightarrow \ B(10; \ 0,02)$

b) Es una distribución binomial con $n = 10, \ p = \frac{3}{7} \ \rightarrow \ B\left(10, \ \frac{3}{7}\right)$

Ejercicio nº 3.-

Se sabe que el 30% de la población de una determinada ciudad ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas de esa ciudad elegidas al azar. Calcula la probabilidad de que, entre esas 10 personas, estuvieran viendo el programa:

a) Más de 8.

b) Alguna de las 10.

Halla la media y la desviación típica.

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de personas entre esas 10, que están viendo el programa", se trata de una distribución binomial con $n = 10, \ p = 0,3 \ \rightarrow \ B(10; 0,3)$.

a) $p[x > 8] = p[x = 9] + p[x = 10] =$

$$= \binom{10}{9} \cdot 0,3^9 \cdot 0,7 + \binom{10}{10} \cdot 0,3^{10} = 10 \cdot 0,3^9 \cdot 0,7 + 0,3^{10} = 0,000144 \rightarrow p[x > 8] = 0,000144$$

b) $p[x > 0] = 1 - p[x = 0] = 1 - 0,7^{10} = 0,972 \rightarrow p[x > 0] = 0,972$

Hallamos la media y la desviación típica:

$\mu = np = 10 \cdot 0{,}3 = 3 \quad \rightarrow \quad \mu = 3$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{2{,}1} = 1{,}45 \quad \rightarrow \quad \sigma = 1{,}45$